Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

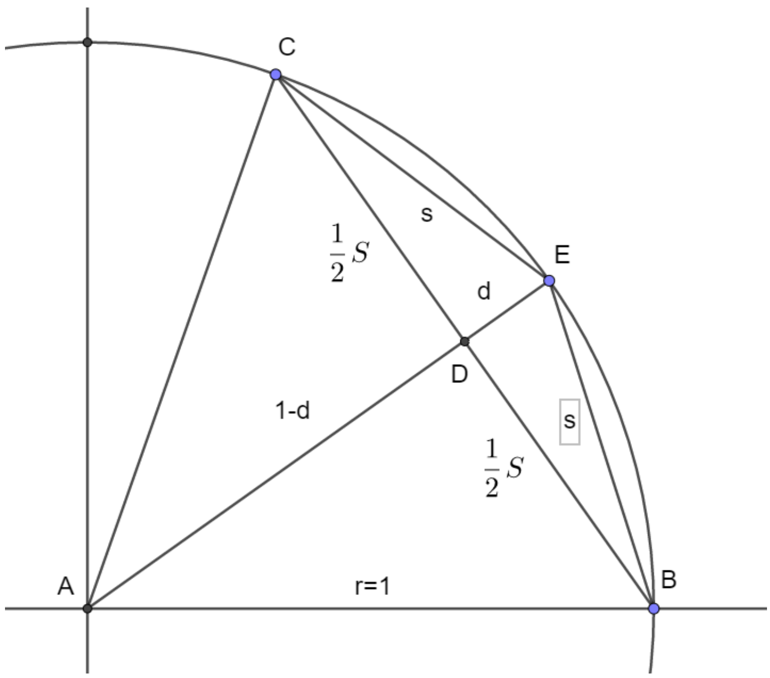
Text 02 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

Die im Text 01 vorgestellte Aufgabe setzt voraus, dass den Schülern die Zahl π und die Formel $U = 2\pi r$ zur Berechnung des Kreisumfangs bekannt ist. Hier soll nun ein Weg aufgezeigt werden, der es Neuntklässlern ermöglicht die Zahl π zu begreifen. Zugleich ist dieser Weg eine gute Übung zur Anwendung des Satzes von Pythagoras. Geometrisch versteht man unter der Ludolphschen Zahl π (*Ludolph van Ceulen errechnete 1610 die ersten 35 Nachkommastellen von* π) die halbe Länge des Umfangs eines Kreises mit dem Radius $r = 1$. In der Bibel finden sich zwei Textstellen mit $\pi = 3$. Der folgende Weg soll nun eine arithmetische Darstellung von π liefern.

Wird einem Kreis mit Radius $r = 1$ ein regelmäßiges 2^n-Eck (Quadrat, Achteck, Sechzehneck usw.) einbeschrieben, so ist der halbe 2^n-Eckumfang ein Näherungszahl für π, der mit wachsendem n der Zahl π immer näher kommt. Wenn man bei einem gegebenem 2^n-Eck mit Seitenlänge S den Kreisbogen über S halbiert, dann erhält man ein 2^{n+1}-Eck mit der doppelten Anzahl von Ecken. Bezeichnet man die Seitenlänge des so erzeugten 2^{n+1}-Ecks mit s, dann gilt

$$s = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S^2}} \tag{2.1}$$

Um die Richtigkeit dieser sogenannten *Ceulenschen Verdoppelungsformel* einzusehen, betrachte man die nachstehende Skizze.



Dabei sei A der Mittelpunkt des Einheitskreises und die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AE}$ und $\overline{AC}$ sind Radien mit der Länge 1. Die Länge von $\overline{BE}$ ist s und die von $\overline{BC}$ ist S. Bezeichnet man noch die Streckenlänge von $\overline{DE}$ mit d, dann gilt mit Satz von Pythagoras

für das Dreieck ABD $\qquad 1 - d = \sqrt{1^2 - \left(\tfrac{1}{2}S\right)^2}$

und für das Dreieck BED $\qquad d = \sqrt{s^2 - \left(\tfrac{1}{2}S\right)^2}$

Addiert man die beiden letzten Gleichungen zu

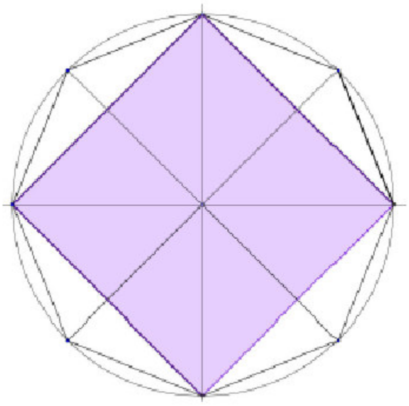
$$1 = \sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{2}s\right)^2} + \sqrt{s^2 - \left(\tfrac{1}{2}s\right)^2}$$

und löst diese Summengleichung nach s hin auf, so liefert die positive Lösung gerade die Gleichung in Zeile (2.1).

Bezeichnet man den halben Umfang des in den Einheitskreis einbeschriebenen 2^{n+1}-Ecks mit π_n, und startet mit einem Quadrat mit der Seitenlänge $s_1 = \sqrt{2}$, dann ist $\pi_1 = 2^1\sqrt{2}$ eine erste Näherung von π. Die Gleichung (2.1) in der Form $s_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ erlaubt es nun die Seitenlänge s_2 des zugehörigen Achtecks zu berechnen. Es gilt nämlich

$$s_2 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_1^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\sqrt{2}\right)^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\sqrt{2}\right)^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

und damit ist $\pi_2 = 2^2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ eine etwas bessere Näherung für π. Zur Veranschaulichung diene die folgende Skizze



Die folgende Übersicht zu den ersten Näherungen legen die unten gegebene Definition von π nahe.

$$\begin{array}{lcll}
\pi_1 & = & 2^1\sqrt{2} & \approx 2.82842712 \\
\pi_2 & = & 2^2\sqrt{2-\sqrt{2}} & \approx 3.06146746 \\
\pi_3 & = & 2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \approx 3.12144515 \\
\pi_4 & = & 2^4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} & \approx 3.13654849 \\
\pi_5 & = & 2^5\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} & \approx 3.14033116 \\
\pi_6 & = & 2^6\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}} & \approx 3.14127725 \\
\vdots & & \vdots & \quad\vdots
\end{array}$$

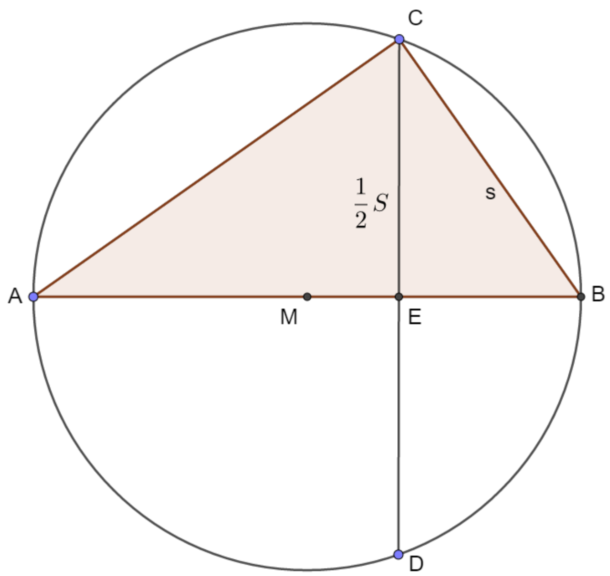
$$\pi := \lim_{n\to\infty}\left(2^n\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}}}_{n \text{ geschachtelte Wurzeln}}\right)$$

Diese Definition beinhaltet eine Vorschrift, die es (nur theoretisch!) erlaubt π als Dezimalzahl bis zu einer beliebig gewählten Stelle hinter dem Komma genau zu schreiben. Gegenwärtig (Anno 2021) sollen von π die ersten 62.831.853.071.796 Ziffern hinter dem Komma errechnet sein. Dazu hat man jedoch andere, sehr schnell zu π konvergierende Zahlenfolgen genutzt. Die hier vorgestellte Folge (π_n) konvergiert sehr langsam. π ist nach dieser Definition der Grenzwert eines Produktes der divergenten Folge (2^n) und der Folge der geschachtelten Wurzeln.

Aufgabe 2.1: Zeigen Sie bitte $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}} = 0$

Aufgabe 2.2: Der griechische Mathematiker Archimedes (288-212 v.Chr.) hatte für die Annäherung an π anstelle eines Quadrates ein regelmäßiges Sechseck als Startfigur gewählt. Berechnen Sie mithilfe der *Ceulenschen Verdoppelungsformel* die ersten vier Näherungswerte für π.

Anbei ein weiterer Zugang zur *Ceulenschen Verdoppelungsformel*.



Die Skizze zeigt den Einheitskreis mit Mittelpunkt M und eine beliebig eingezeichnete Sehne $\overline{CD}$ mit der Streckenlänge S und ihrem Mittelpunkt E. Senkrecht zur Sehne schneidet ein Kreisdurchmesser $\overline{AB}$ die Sehne in E. Damit halbiert B den Kreisbogen über der Sehne $\overline{CD}$. Die Streckenlänge von $\overline{BC}$ soll nun wiederum mit s bezeichnet sein. Die Streckenlänge von $\overline{AC}$ ist dann nach Pythagoras $\sqrt{2^2-s^2}$. Für den Flächeninhalt F des Dreiecks ABC gilt dann einerseits $2F = s\cdot\sqrt{2^2-s^2}$ und andererseits $2F = 2\cdot\frac{1}{2}S$. Setzt man die Quadrate beider Terme gleich, so führt $s^2\cdot(2^2-s^2) = S^2$ zu der einfachen biquadratischen Gleichung

$$s^4 - 4s^2 + S^2 = 0\ . \tag{2.2}$$

Die Gleichung in (2.2) kann man mit der Substitution $z := s^2$ zu

$$z^2 - 4z + S^2 = 0$$

vereinfachen. Die Lösungen liefert die p-q-Formel zu $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - S^2}$ und wegen $s = \pm\sqrt{z}$ gilt, folgt weiter $s_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{4 - S^2}}$ .Also gewinnt man die vier Lösungen

$$s_1 = \sqrt{2 + \sqrt{4 - S^2}}\ ,\ s_2 = -\sqrt{2 + \sqrt{4 - S^2}}\ ,\ s_3 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S^2}}\ \text{ und } s_4 = -\sqrt{2 - \sqrt{4 - S^2}}\ .$$

Damit ist $s = s_3 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S^2}}$ die von uns gesuchte geometrische Lösung, denn s_1 wäre mit $S < 2$ stets größer als $\sqrt{2}$. Das ist aber nicht möglich.

Die Lösung der folgenden Aufgabe aus der Oberstufenmathematik steht in einem bemerkenswerten Zusammenhang zur Zahl π.

Aufgabe 2.3: Prof. Dr. P. Nibel bekannt durch seine Habilitationsschrift über das postweihnachtliche Abnadeln von Weihnachtsbäumen der Art Abies nordmannia in zentralgeheizten Mietwohnungen mit protestantische Mietern in mitteleuropäischen Diasporagemeinden, belauert seit Weihnachten 2020 seinen Weihnachtsbaum. Gegenwärtig hängt nur noch die eine von ursprünglich 187259 Nadeln über dem sorgfältig gesäuberten und gewachsten Dielenboten. Augenblicklich geht er experimentell der Frage nach, mit welcher Wahrscheinlichkeit P eine zufällig herabfallende Tannenbaumnadel der Länge $l = 3cm$ auf genau zwei Dielenbrettern zu liegen kommt. Die Dielenbretter haben Raumlänge und eine Breite von $d = 8cm$. Bestimmen Sie bitte diese Wahrscheinlichkeit P bevor die Nadel fällt.

Bemerkungen:

- Die Lösungen der Aufgaben finden Sie in dem kommenden Vorlesungstext 03. Die Aufgabe 2.3 ist sicher schwer zu lösen, zumal ich noch keine Hinweise zur Stochastik gegeben habe. Die anderen Aufgaben gehören in die Sekundarstufe 1.
- In einer Prüfung sollten Sie Herleitungen der *Ceulenschen Verdoppelungsformel* wiedergeben können und auch den Weg zu π beschreiben können.
- Sollten Sie In meinen Texten Fehler oder Unklarheiten bemerken, dann mache Sie mich doch bitte darauf aufmerksam.