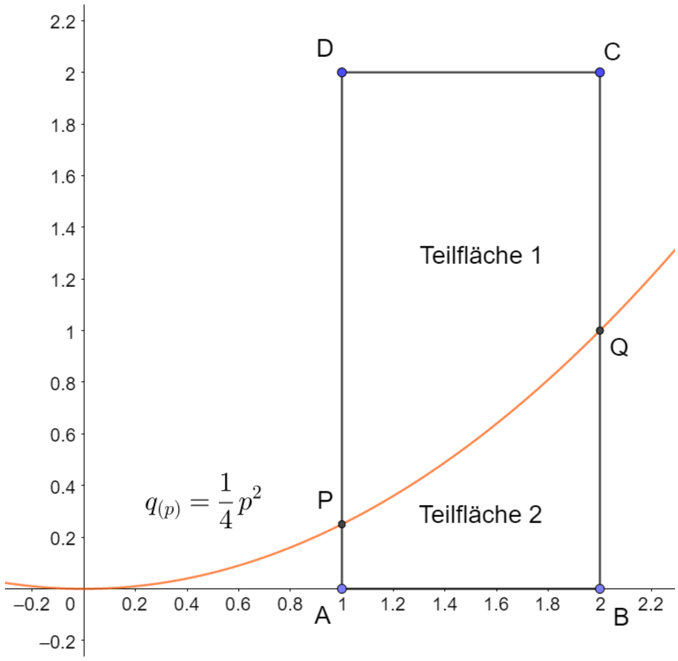
Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

Text 05 zur Vorlesung im WS 2020-21 von Hans-Ulrich Brandenburger

Zuerst noch eine erbetene Bemerkung im Zusammenhang mit der Aufgabe 3.1

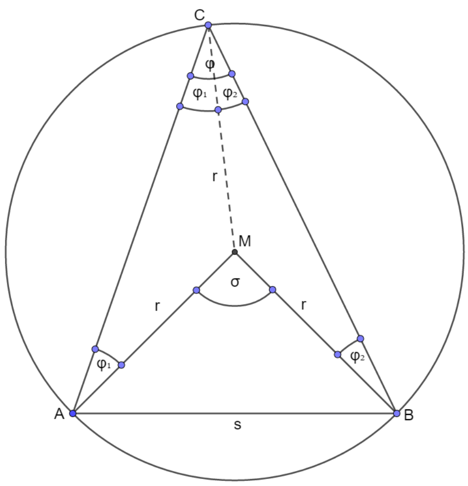


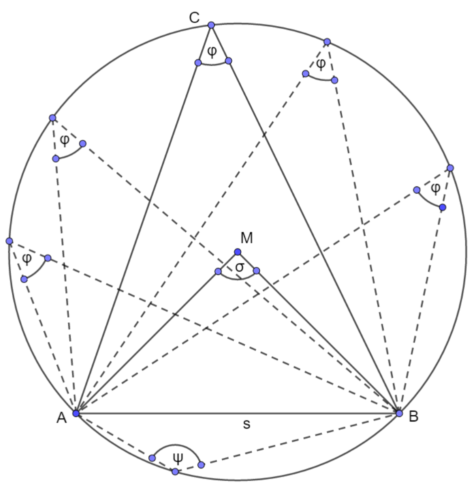
Wird q aus dem abgeschlossenen Intervall $[0,2]$ gewählt, dann verdoppelt sich der Flächeninhalt wie oben skizziert. Die Menge der Zahlenpaare (p,q) die in die betrachtete quadratische Gleichung eingesetzt reelle Lösungen zeitigen befinden sich auf der Teilfläche 2 unterhalb des Graphen von q. Also gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{\text{Flächeninhalt der Teilfläche 2}}{\text{Flächeninhalt des Rechtecks ABCD}} = \frac{\int_1^2 \frac{1}{4}p^2 dp}{2} = \frac{\frac{7}{12}}{2} = \frac{7}{24}$$

Jetzt zu den Lösungen der Aufgabe 4:

Peripheriewinkelsatz: Der Peripheriewinkel φ über einer Sehne in einem Kreis ist stets halb so groß wie der zugehörige Zentrumswinkel σ.





Aufgabe 4.1a: Zeigen Sie $\sigma = 2\varphi$.

Lösung: Der Peripheriewinkel φ wird durch die Strecke $\overline{CM}$ in die zwei nicht unbedingt gleichen Teilwinkel φ_1 und φ_2 zerlegt. Da die drei Teildreiecke des Dreiecks ABC stets gleichschenklige Dreiecke sind, gilt für die Summe der drei Winkel mit Scheitelpunkt M

$$2\pi = (\pi - 2\varphi_1) + (\pi - 2\varphi_2) + \sigma = 2\pi - 2(\varphi_1 + \varphi_2) + \sigma = 2\pi - 2\varphi + \sigma$$

und folglich $-2\varphi + \sigma = 0$ bzw. $\sigma = 2\varphi$.

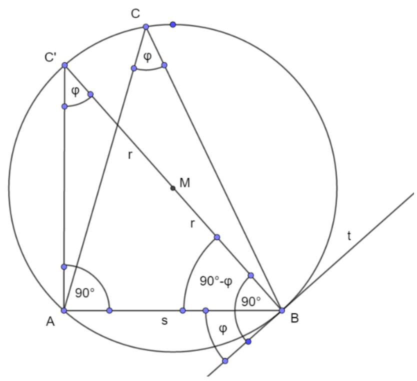
Aufgabe 4.1b: Wie kann man ψ in der rechten Figur durch σ darstellen?

Lösung: Der zu dem Peripheriewinkel ψ über der Sehne s zugehörige Zentrumswinkel ist $2\pi - \sigma$ und mit dem in 4.1a bewiesenem Peripheriewinkelsatz gilt dann $\psi = \pi - \frac{1}{2}\sigma$. Ersetzt man $\frac{1}{2}\sigma$ mit φ, dann erhält man den schönen

Satz *Ist φ ein Peripheriewinkel über einer Kreissehne und ψ ein Peripheriewinkel unterhalb dieser Sehne, dann gilt stets $\varphi + \psi = \pi$.*

Aufgabe 4.1c: Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Tangente an den Kreis im Punkt B und der Sehne s in Abhängigkeit von φ.

Lösung: Zieht man den Punkt C in die Position C', dann bleibt uns der Peripheriewinkel φ erhalten. Die Sehne $\overline{BC}$ wird damit zu dem Durchmesser $\overline{BC'}$. Dies zeigt die folgende Skizze.



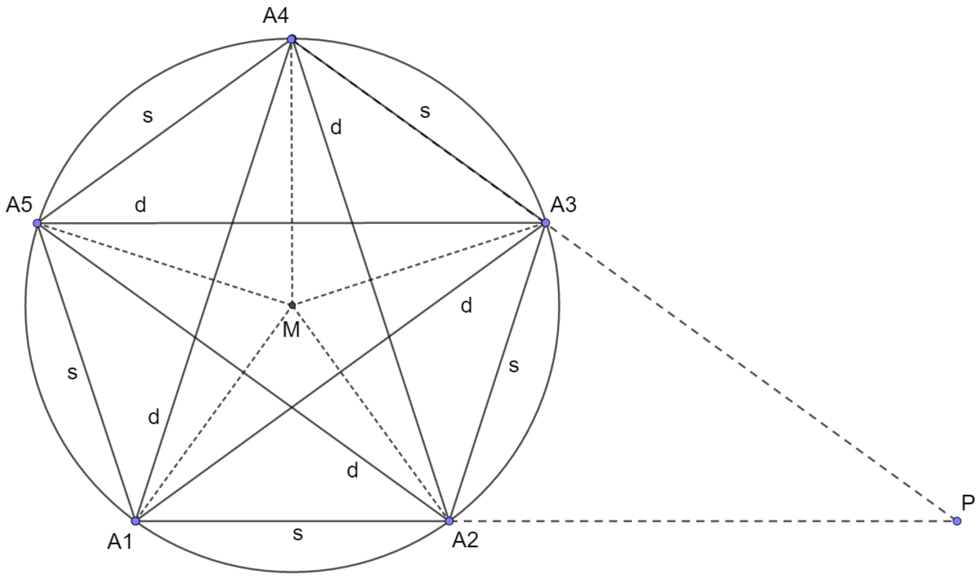
Das Dreieck ABC' ist dann rechtwinklig und der Winkel $C'BA$ beträgt $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Der Radius $\overline{MB}$ steht senkrecht auf der Tangente t. Also ist der gesuchte Winkel gleich φ bzw. $\pi - \varphi$.

Aufgabe 5.1: Der Peripheriewinkelsatz kombiniert mit einem der Ähnlichkeitssätze für Dreiecke macht es nun ganz leicht den Sehnensatz, den Sekantensatz und den Tangentensatz zu beweisen. Erproben Sie sich bitte daran.

Die Vorstellung der Pythagoreer, dass sich der Kosmos nach Verhältnissen natürlicher Zahlen ordnen und beschreiben lässt, musste aufgegeben werden, nachdem sie erkannten, dass es inkommensurable Strecken gibt. Inkommensurable Strecken sind Strecken die kein gemeinsames Maß besitzen. So sind eine Seiten und eine Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks stets inkommensurabel. Diese Erkenntnis wird vielfach dem *Hippasos von Metapont (6./5. Jhd. v.Chr.)* zugeschrieben. Arithmetisch entspricht die Inkommensurabilität der Strecken der Irrationalität des Quotienten der Streckenlängen. Bezeichnet man bei einem regelmäßigen Fünfeck die Seitenlänge mit s und die Diagonalenlänge mit d, so gilt für den Quotienten

$$\frac{d}{s} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \notin \mathbb{Q}.$$

Aufgabe 5.2a: Leiten Sie bitte aus der Skizze eines regelmäßigen Fünfecks die Gleichung $\frac{d}{s} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ her. Wenn Sie den zugehörigen Umkreis hinzudenken, dann sind die Seiten und Diagonalen Sehnen im Umkreis. Mit dem Peripheriewinkelsatz, einem der Ähnlichkeitssätze für Dreiecke und der folgenden Skizze sollten Sie die gesuchte Herleitung der Gleichung leicht gewinnen können. Dabei ist P der Schnittpunkt der Geraden A_1A_2 und A_3A_4.



Aufgabe 5.2b: Versuchen Sie aus der Gleichung $d = s\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ für eine vorgegebene Strecke s eine Konstruktionsanleitung für das zugehörige regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal herzuleiten.

Die Griechen der Antike sahen nur die natürlichen Zahlen als Zahlen an. Rationale Zahlen kannten sie nicht, obwohl sie mit Zahlenverhältnissen zu argumentieren verstanden. Irrationale Zahlen waren ihnen dann natürlich gänzlich fremd. Wählten sie beim Fünfeck $s = 1$, dann war die Strecke mit der Streckenlänge $d = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) = 1.618\,033\ldots$ sehr wohl als geometrisches Objekt sichtbar vorhanden, aber die Länge mit einer Zahl nicht zu benennen. In England wurde bis in die Gegenwart hinein eine irrationale Zahl als *surd number (stimmlose Zahl)* bezeichnet. Es sollten weit mehr als zweitausend Jahre vergehen, bis man zum heutigen Verständnis der irrationalen Zahlen fand. In diesem großen Zeitraum dominierte die Geometrie die Arithmetik. Inzwischen beginnt wohl eine Zeit der arithmetischen Dominanz, wie die zunehmende Digitalisierung aufzeigt. Im Schulunterricht ist die Bedeutung der Geometrie deutlich geschwunden.

Den Schülern sollte man den Unterschied zwischen rationalen und irrationalen Zahlen besonders deutlich machen. Wenn $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ in den Taschenrechner eingegeben wird und der dann $1.618\,033\,989$ anzeigt, gilt keineswegs die Gleichung $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) = 1.618\,033\,988\,75$, denn links vom Gleichheitszeichen steht eine irrationale und rechts eine rationale Zahl. Genau genommen sagt der Taschenrechner hier nur $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \approx 1.618\,033\,988\,75 = \frac{1294\,427\,191}{800\,000\,000}$. Achten Sie bitte im Unterricht sehr streng auf den richtigen

Gebrauch von Gleichheitszeichen "=" und dem Ungefähr-Gleichzeichen "≈". Das Rechnen mit gerundeten Zahlen führt sehr schnell zu gänzlich unbrauchbaren Ergebnissen und und das kann auch tödlich enden. Während des ersten Golfkrieges im Februar 1991 gelang es nicht, eine anfliegende feindliche Rakete mithilfe des amerikanischen Patriot-Abwehrsystems unschädlich zumachen. Rundungsfehler im zugehörigen Rechner vereitelten die Abwehr und 28 Menschen wurden getötet und 100 wurden verletzt.

Zum Nachweis der **Irrationalität von Wurzeln** bedient man sich fast immer eines Beweises durch Widerspruch. Das Prinzip eines Widerspruchsbeweises verstehen die Schüler augenblicklich, wenn sie sich in die folgende Situation hineindenken.

Die Englischlehrerin Misses Tie Äitsch beabsichtigt die neuen Vokabeln abzufragen. Zu einem der Schüler, dem es bisher noch nie gelang eine Vokabel richtig zu benennen, sagt sie: "Wir sparen uns diesmal die peinliche Abfragerei und ich notiere Dir gleich eine gutgemeinte Sechs, denn ich behaupte, dass Du wieder nicht gelernt hast." Augenblicklich protestieren die Mitschüler und weisen die Lehrerin darauf hin, dass der besagte Schüler die Vokabeln ja doch gelernt haben könnte. Die Lehrerin erwidert: " Gut, nehmen wir einmal an, er hat die Vokabeln gelernt." und beginnt deshalb mit dem Abfragen der Vokabeln. Da aber sämtliche Antworten des Schülers im Widerspruch zu den Antworten stehen, die in den Wörterbüchern von Pons und Langenscheidt zu finden sind, ist sie sehr sicher, dass die gemachte Annahme falsch und ihre Behauptung wahr ist.

Satz: $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

Beweis: Wir nehmen an, $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Dann muss es zwei teilerfremde natürliche Zahlen a und b geben mit $\frac{a}{b} = \sqrt{5}$ bzw. $a^2 = 5b^2$. Zunächst betrachten wir den

Fall $\mathbf{b = 1}$ Wegen $2^2 = 4 < a^2 = 5 < 3^2 = 9$ müsste a eine natürliche Zahl zwischen 2 und 3 sein. Das widerspricht der Beschaffenheit von $\mathbb{N}$.

Fall $\mathbf{b \neq 1}$ Da $b > 1$ ist muss es wenigstens eine Primzahl p geben die b teilt. Damit teilt p das Produkt $5b^2$ und also auch a^2. Jede Primzahl die a^2 teilt, teilt aber auch a. Folglich müssen a und b mit der Primzahl p einen gemeinsamen Teiler haben im Widerspruch zur ihrer vorausgesetzten Teilerfremdheit . Also gilt $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.■

Mit der gezeigten Irrationalität von $\sqrt{5}$ gilt natürlich auch $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \notin \mathbb{Q}$. Der oben vorgestellte Beweis kann für alle irrationalen Wurzeln $\sqrt[k]{n}$, k und n aus $\mathbb{N}$, so geführt werden.

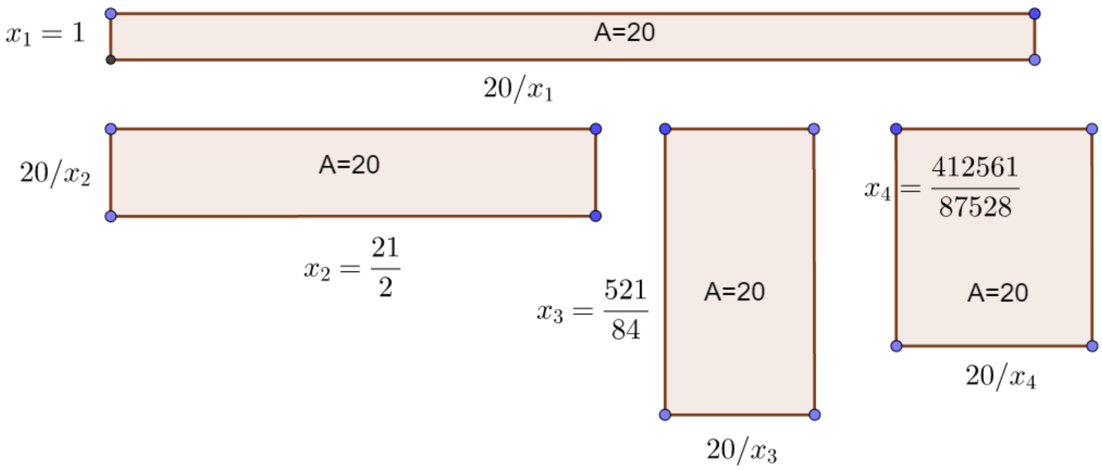
Aufgabe 5.3: Zeigen Sie bitte $\sqrt[4]{38} \notin \mathbb{Q}$.

Um schnell Näherungen von irrationalen Quadratwurzel zu gewinnen, bedienen wir uns heute der elektronischen Rechengeräte. Heron von Alexandria hatte wohl schon im ersten Jahrhundert n.Chr. ein geometrisches Verfahren zu Wurzelapproximation entwickelt, das auch arithmetisch genutzt werden kann. Hier seine Idee zur Annäherung an die Quadratwurzel einer Zahl R.

Man stellt sich ein Rechteck mit dem Flächeninhalt R vor dessen eine Seitenlänge beliebig gewählt sein mag und mit x_n bezeichnet wird. Die Seitenlänge der benachbarten Seite muss dann $\frac{R}{x_n}$ sein. Das Ziel ist zunächst ein neues Rechteck mit Flächeninhalt R so zu finden, dass der Betrag der Differenz der Seitenlängen kleiner ist als zuvor. Das gelingt mit einer neuen Seitenlänge

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{R}{x_n}\right)$$

die das arithmetische Mittel der ursprünglichen Seitenlängen ist. Auf das neue Rechteck mit den Seitenlängen x_{n+1} und $\frac{R}{x_{n+1}}$ kann dieses *Heronverfahren* erneut angewendet werden. Das nachstehende Bild zeigt für die Quadratwurzel aus 20 wie sich die Rechteckgestalt in Richtung eines Quadrates verändert, wenn man das Heronverfahren mit $x_1 = 1$ startet.



Die Folge der x_n konvergiert sehr viel schneller zu $\sqrt{20}$, wenn man den Startwert nahe der gesuchten Wurzel wählt. Dies zeigen die folgenden Tabellen.

Startwert 1

$x_1 =$	1	$=$	1
$x_2 =$	$\frac{21}{2}$	$=$	10.5
$x_3 =$	$\frac{521}{84}$	$\approx$	$6.202\,380\,952\,380\,952$
$x_4 =$	$\frac{412\,561}{87\,528}$	$\approx$	$4.713\,474\,545\,288\,365$
$x_5 =$	$\frac{323\,429\,594\,401}{72\,221\,278\,416}$	$\approx$	$4.478\,314\,445\,474\,382$
$x_6 =$	$\frac{208\,924\,963\,655\,223\,119\,929\,921}{46\,716\,997\,570\,417\,151\,497\,632}$	$\approx$	$4.472\,140\,217\,065\,700$
$\vdots$			$\vdots$
$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{20}$		$\approx$	$4.472\,135\,954\,999\,579$

Startwert 4

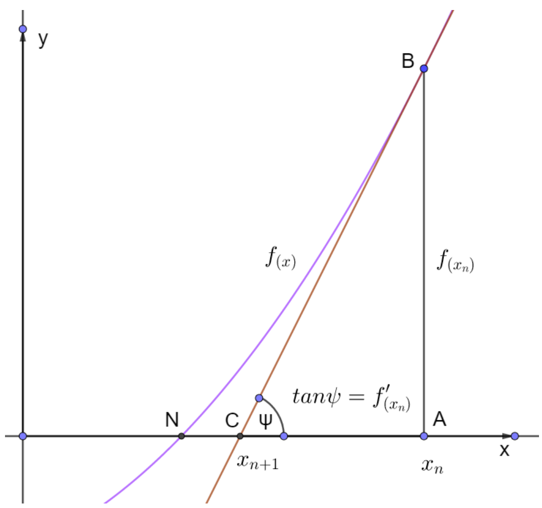
$$\begin{array}{rcl}
x_1 = & 4 & = & 1 \\
x_2 = & \frac{9}{2} & = & 4 \\
x_3 = & \frac{161}{36} & = & 4.47\overline{2} \\
x_4 = & \frac{51841}{11592} & \approx & 4.472135955831608 \\
x_5 = & \frac{5374978561}{1201881744} & \approx & 4.472135954999579 \\
x_6 = & \frac{57780789062419261441}{12920177213714580768} & \approx & 4.472135954999579 \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{20} & \approx & 4.472135954999579
\end{array}$$

Aufgabe 5.4: Versuchen Sie analog zu dem Heronverfahren eine Rekursionsformel zur Approximation von dritten Wurzeln zu gewinnen, indem Sie geeignete Quader in Richtung eines Würfels verändern.

Bemerkung: Im Anhang zur Vorlesung 05 stelle ich Ihnen einen von mir erdachten Weg zur Approximation von Quadratwurzeln vor, der die Annäherung an eine irrationale Quadratwurzel durch rationale Zahlen für Schüler besonders gut erhellt. In einer Prüfung sollten Sie diesen Weg und seine Herleitung kennen. Die in diesem Anhang geführten Beweise und Folgerungen sind aber keine Prüfungsgegenstände.

In der Oberstufe kann man sich des *Newton-Verfahrens* bedienen um Wurzeln zu approximieren. Deshalb hier eine kurze für Schüler verständliche Herleitung der Newtonschen-Approximationsformel.

Dieses Verfahren ermöglicht es die Nullstelle einer gegebenen über einem Intervall genügend braven und differenzierbaren Funktion f näherungsweise zu bestimmen. Die vollständigen an f zu stellenden Anforderungen findet man in [8]. Die Skizze unten zeigt den Graphen von f der durch die Punkte B und N läuft, dabei sei mit N die Nullstelle von f bezeichnet. Wählt man nun willkürlich einen Punkt A auf der x-Achse und bezeichnet seine x-Koordinate mit x_n, dann soll B der Punkt $(x_n, f_{(x_n)})$ sein. Die Tangente an f im Punkt B hat dann die Steigung $f'_{(x_n)}$ und schneidet die x-Achse in C. Die x-Koordinate von C bezeichnen wir mit x_{n+1}.



In dem zugehörigen Steigungsdreieck gilt nun $f'_{(x_n)} = \tan\psi = \frac{f_{(x_n)}}{x_n - x_{n+1}}$.Löst man die Gleichung $f'_{(x_n)} = \frac{f_{(x_n)}}{x_n - x_{n+1}}$ nach x_{n+1} hin auf, dann erhält man die Newtonsche-Approximationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}} \ .$$

Die wiederholte Anwendung dieses Verfahrens bewirkt, dass die x_n gegen N wandern.

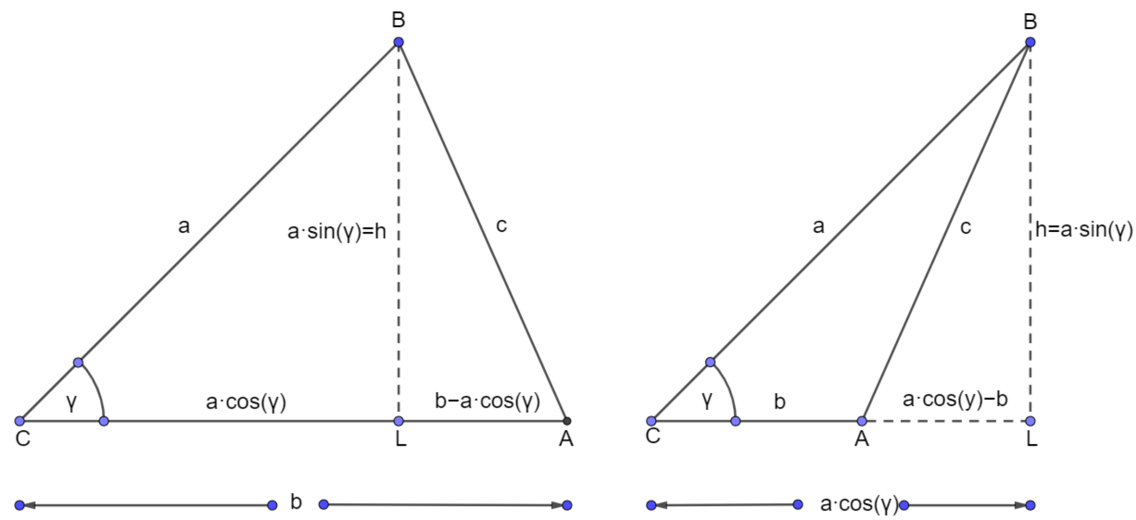
Aufgabe 5.5: Versuchen bitte mithilfe des Newton-Verfahrens für die $\sqrt[3]{29}$ rationale Näherungen zu finden. Starten Sie mit $x_1 = 3$ und bestimmen Sie x_2 und x_3 genau.

Aufgabe 4.2: Was lehrt der *Kosinussatz* und wie kann man ihn herleiten?

Lösung: Multipliziert man die Seitenlängen zweier Dreiecksseiten mit dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels und subtrahiert man das doppelte dieses Produktes von der Summe der Quadrate dieser Seitenlängen, dann ist das gleich dem Quadrat der Seitenlänge der dritten Dreiecksseite. Im Dreieck ABC gilt dann

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad \text{und} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Zum Beweis reicht es eine der drei Gleichungen herzuleiten. Wenn man die rechte Gleichung betrachtet erkennt man sofort, dass der Kosinussatz eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras ist. Für $\gamma = 90°$ ist $\cos\gamma = 0$ und die rechte Gleichung schrumpft so zu der bekannten Identität $c^2 = a^2 + b^2$. Die folgende Skizze zeigt nun zwei verschiedene Dreiecke CAB, bei dem linken Dreieck liegt die Höhe h_b im Inneren des Dreiecks und bei dem rechten Dreieck außerhalb. Der Fußpunkt der Höhe auf den Geraden AC ist jeweils mit L bezeichnet.



Für beide Dreiecke CAB sind die Dreiecke CLB rechtwinklig und mit ihrer Hypotenuse a und dem Winkel γ gilt dann $|\overline{BL}| = h_b = a\sin\gamma$ und $|\overline{CL}| = a\cos\gamma$. Auch die Dreiecke LAB bzw. ALB sind rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenuse c und der Kathete $|\overline{BL}| = h_b = a\sin\gamma$. Die zweite Kathete ist links $|\overline{LA}| = b - a\cos\gamma$ und rechts $|\overline{AL}| = a\cos(\gamma) - b$. Mit dem Satz von Pythagoras und der Gleichung $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$ folgt dann für das linke Dreieck

$$\begin{aligned} c^2 &= (a\sin\gamma)^2 + (b - a\cos\gamma)^2 &&= a^2\sin^2\gamma + b^2 - 2ba\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma \\ &= a^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + b^2 - 2ba\cos\gamma &&= a^2 + b^2 - 2ba\cos\gamma \end{aligned}$$

und für das rechte Dreieck

$$\begin{aligned} c^2 &= (a\sin\gamma)^2 + (a\cos(\gamma) - b)^2 &&= a^2\sin^2\gamma + a^2\cos^2\gamma - 2ba\cos\gamma + b^2 \\ &= a^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + b^2 - 2ba\cos\gamma &&= a^2 + b^2 - 2ba\cos\gamma \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Jeder sollte die hier vorgestellten Lösungen, Herleitungen und Beweise beherrschen.
- Die Lösungen der hier gestellten Aufgaben werden im Text 06 vorgestellt.

Literatur:

[8] Heuser ,Harro: Lehrbuch der Analysis Teil 1, Stuttgart, Teubner, 1993