Eine kleine Erinnerungstour zu einigen Grundbegriffen der Stochastik

Ein Apfelsinenstück wird durch zwei ebene Flächen und eine gekrümmte Fläche begrenzt. Die zwei nahezu ebenen Flächen seien mit einer 1 bzw. einer 2 und die gekrümmte Fläche mit einer 3 gekennzeichnet. Führt man nun das **Zufallsexperiment** *'Einmaliges Werfen dieses Apfelsinenstückes und Notieren der Aufschlagsflächennummer'* zehntausendmal durch und notiert die jeweilige absolute Häufigkeit $h_{(x)}$, mit der die Flächennummer x auf dem Boden zu liegen kommt, so kann dies zu der folgenden Zuordnung führen.

Flächennummer x:	**1**	**2**	**3**
absolute Häufigkeit $h_{(x)}$:	5000	4000	1000

Man kann zwar nicht ausschließen, dass in allen folgenden Würfen nur noch die 2 als **Ergebnis** erscheint, allerdings ist ein solches Ereignis nach dem Gesetz der großen Zahl außerordentlich unwahrscheinlich. Nach diesem Gesetz darf man eher erwarten, dass die **Wahrscheinlichkeit** $p(\{x\})$, $x \in \{1,2,3\}$, eine 1, 2 oder 3 zu werfen näherungsweise gleich den **relativen Häufigkeiten** $h_r(x)$ unseres Zufallsexperimentes ist. Wir unterstellen nun einmal, dass die folgenden Wahrscheinlichkeiten $p(\{x\})$ tatsächlich gegeben sind.

Flächennummer:	**1**	**2**	**3**
$p(\{x\}) =$	0.5	0.4	0.1

Das Zufallsexperiment hat ja die **Ergebnismenge**

$$\Omega = \{1,2,3\}$$

Jedes **Ereignis** E bei diesem Zufallsexperiment ist nun per definitionem eine Teilmenge von unserer **Ergebnismenge** Ω. Die Menge aller denkbaren Ereignisse ist hier also gleich der Menge aller Teilmengen, der so genannten **Potenzmenge** $\mathfrak{P}$ von Ω . Für unser Beispiel gilt

$$\mathfrak{P}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{ccc} & \emptyset & \\ \{1\} & \{2\} & \{3\} \\ \{2,3\} & \{1,3\} & \{1,2\} \\ & \Omega & \end{array} \right\}$$

Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind dann

$$\begin{array}{ccc} & p(\emptyset) = 0 & \\ p(\{1\}) = 0.5 & p(\{2\}) = 0.4 & p(\{3\}) = 0.1 \\ p(\{2,3\}) = 0.5 & p(\{1,3\}) = 0.6 & p(\{1,2\}) = 0.9 \\ & p(\Omega) = 1 & \end{array}$$

Es handelt sich hier erkennbar um keine **Laplace-Wahrscheinlichkeit**, da die **Elementarereignisse** $\{1\}$, $\{2\}$ und $\{3\}$ ungleiche Wahrscheinlichkeiten besitzen.

Um den Begriff der Wahrscheinlichkeit axiomatisch fassen zu können, ist es zunächst notwendig den Begriff des **Ereignisraumes** $\mathfrak{F}$ zu gewinnen.

Definition *Man spricht von einer **Ereignisalgebra** oder einer* σ-***Algebra*** *oder einem **Ereignisraum** $\mathfrak{F}$ **über einer Ergebnismenge** Ω genau dann, wenn die nachstehenden vier Bedingungen erfüllt sind.*

1. $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ *(Jedes Ereignis im Ereignisraum $\mathfrak{F}$ ist eine Teilmenge von Ω. Jede Teilmenge von Ω muss aber nicht unbedingt in $\mathfrak{F}$ enthalten sein.)*

2. $\Omega \in \mathfrak{F}$

3. $E \in \mathfrak{F} \Rightarrow \overline{E} \in \mathfrak{F}$ *(Wenn ein Ereignis E in $\mathfrak{F}$ enthalten ist, so soll auch sein Komplementärereignis $\overline{E}$ in $\mathfrak{F}$ sein.)*

4. $(\{E_1, E_2, E_3, \ldots\} \subset \mathfrak{F} \ \wedge\ |\{E_1, E_2, E_3, \ldots\}| \leq |\mathbb{N}|) \Rightarrow (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots) \in \mathfrak{F}$
(Hat man mehrere Ereignisse E_k in $\mathfrak{F}$, so soll auch die Vereinigungsmenge $\bigcup_k E_k$ aller dieser Ereignisse in $\mathfrak{F}$ enthalten sein. Allerdings darf die Anzahl dieser Ereignisse die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen nicht überschreiten. Man darf also höchstens abzählbar unendlich viele Ereignisse vereinigen.)

Mit dieser Definition ist für unser Beispiel mit $\Omega = \{1,2,3\}$ die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ eine Ereignisalgebra über Ω. Hier noch zwei weitere Ereignisalgebren über unserer Ergebnismenge:

$$\mathfrak{F}_1 = \left\{ \emptyset,\ \ \Omega \right\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}_1 = \left\{ \emptyset,\ \ \{1\},\ \ \{2,3\},\ \ \Omega \right\}$$

Ereignisse sind Mengen und die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist ein Maß vergleichbar einer Streckenlänge oder einem Flächeninhalt. Man kann jedoch leicht zeigen, dass es Mengen gibt, die sich nicht messen lassen. Um solche nichtmessbaren Mengen bzw. Ereignisse auszuschließen, ist die obige Definition notwendig gewesen. Mit dieser Vorbereitung kann man nun den Begriff der **Wahrscheinlichkeit** axiomatisch nach Kolmogorow fassen.

Definition *Sei Ω die Ergebnismenge eines Zufallsexperimentes und $\mathfrak{F}$ eine Ereignisalgebra über Ω, dann heißt eine Funktion $P : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$, die jedem Ereignis E aus $\mathfrak{F}$ eine reelle Zahl zuordnet **Wahrscheinlichkeit** genau dann, wenn die folgenden drei Axiome erfüllt sind.*

(**A1**) $E \in \mathfrak{F} \ \Rightarrow\ 0 \leq P(E) \leq 1$

(**A2**) $P(\Omega) = 1$

(**A3**) *Für eine Menge von höchstens abzählbar unendlich vielen und sämtlich paarweise disjunkten Ereignissen E_k aus $\mathfrak{F}$ gilt die* σ-***Additivität*** *:*

$$P\left(\bigcup_k E_k \right) = \sum_k P(E_k)$$

Bemerkungen:

- Paarweise disjunkte Ereignisse meint, dass die Schnittmenge beliebiger Ereignispaare stets leer ist, also $E_m \cap E_n = \emptyset$.
- In vielen Schulbüchern wird anstelle der notwendigen σ-**Additivität** die nicht ausreichende einfache **Additivität** gefordert

$$(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (P(A \cup B) = P(A) + P(B))\ .$$

- Wie problematisch der Wahrscheinlichkeitsbegriff bezüglich der Potenzmenge als Ereignisraum und der Additivität ist, zeigt der Wurf mit einem mathematischen Dartpfeil auf eine Kreisscheibe K. Die Elementarereignisse sind dann alle Mengen, die genau einen und nur einen Punkt der Scheibe als Element besitzen. Es gibt also überabzählbar viele Elementarereignisse. Die Wahrscheinlichkeit eine Teilfläche T zu treffen kann man mit

$$P(T) = \frac{\text{Flächeninhalt von } T}{\text{Flächeninhalt von } K}$$

angeben. Die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Punkt zu treffen ist damit Null. Damit wäre die Summe aller Wahrscheinlichkeiten der überabzählbaren Elementarereignisse Null und sollte doch gleich 1 sein. Zudem gibt es, wie bereits erwähnt, Punktmengen auf der Scheibe, denen sich keine Wahrscheinlichkeit zuordnen lässt.

- Da man i.A. zu einer gegebenen Ergebnismenge Ω sowohl unterschiedliche Ereignisräume $\mathfrak{F}$ als auch verschiedene Wahscheinlichkeiten P wählen kann macht es Sinn vom jeweiligen **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ zu sprechen.

- *"Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich damit befasst, die Gesetzmäßigkeiten unter den zufälligen Ereignissen aufzudecken und zu untersuchen."* Mit diesen Worten beschrieb der polnische Mathematiker Marek Fisz den Aufgabenbereich der Wahrscheinlichkeitstheorie. Weiterhin bemerkt er, dass *"Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in demselben Verhältnis zur Häufigkeit eines zufälligen Ereignisses steht, wie der exakte Begriff einer geometrischen Figur in der euklidischen Geometrie zur wirklichen Figur im uns umgebenden Raum. Deshalb hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine ähnliche Bedeutung für statistische Probleme, bei welchen man durch Beobachtung von Häufigkeiten die Gesetzmäßigkeiten zufälliger Erscheinungen untersucht, wie sie die Geometrie für die Geodäsie hat."*