Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

Text 07 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

Zunächst noch die Lösungen vorhergehender Aufgaben.

Aufgabe 5.5: Versuchen bitte mithilfe des Newton-Verfahrens für die $\sqrt[3]{29}$ rationale Näherungen zu finden. Starten Sie mit $x_1 = 3$ und bestimmen Sie x_2 und x_3 genau.

Lösung: Ausgehend von $x = \sqrt[3]{29}$ definiert man $f(x) = x^3 - 29$. Nach Newton gilt dann $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 29}{3x_n^2} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{29}{x_n^2}\right)$

$$
\begin{array}{lclcl}
x_1 & = & 3 & = & 3 \\
x_2 & = & \frac{83}{27} & = & 3.\overline{074} \\
x_3 & = & \frac{1\,714\,381}{558\,009} & \approx & 3.072\,317\,829\,999 \\
x_4 & = & \frac{15\,116\,218\,032\,546\,583\,823}{4920\,136\,460\,591\,269\,347} & \approx & 3.072\,316\,825\,686 \\
x_5 & = & \frac{10\,362\,169\,620\,245\,014\,291\,032\,874\,414\,215\,614\,785\,182\,224\,248\,780\,023\,228\,301}{3372\,754\,246\,441\,305\,714\,003\,762\,879\,114\,472\,623\,803\,566\,295\,847\,119\,940\,489} & \approx & 3.072\,316\,825\,685 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\lim\limits_{n\to\infty} x_n & = & \sqrt[3]{29} & \approx & 3.072\,316\,825\,685
\end{array}
$$

Die zusätzlich angegebenen Näherungen x_4 und x_5 zeigen wie schnell bei diesem Verfahren (identisch mit dem Heronverfahren) die Anzahl der Ziffern im Zähler und Nenner der Näherungsbrüche anwachsen. Diese Berechnungen sind ohne geeignete Hilfsmittel nur schwer für Schüler zu leisten.

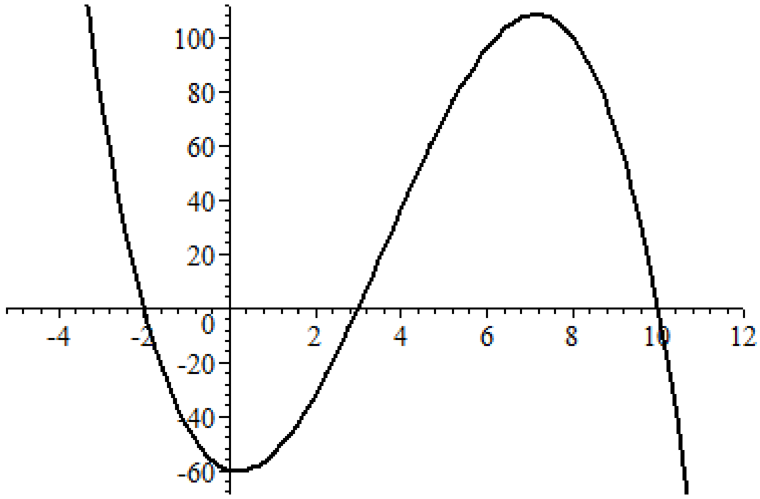
Nun die Lösungen der Aufgaben von Text 06.

Aufgabe 6.1: In den betriebswirtschaftlichen Studiengängen betrachtet man Kostenfunktionen $K(x)$, Umsatzfunktionen $U(x)$ und Gewinnfunktionen $G(x)$ in Abhängigkeit der Produktionsmenge x. Dabei gilt $G(x) = U(x) - K(x)$. Gilt $G(x) \geq 0$ für positive $x \in (a, b)$, so nennt man das Intervall (a, b) Gewinnzone. Seien nun $K(x) = x^3 - 11x^2 + 15x + 60$, $U(x) = 11x$ und $G(-2) = 0$ gegeben.

Aufgabe 6.1a: Bestimmen Sie bitte die Gewinnfunktion, die Gewinnzone und das mögliche Gewinnmaximum.

Lösung:

- Die Gewinnfunktion ist $G(x) = U(x) - K(x) = 11x - (x^3 - 11x^2 + 15x + 60) = -x^3 + 11x^2 - 4x - 60$
- Mit $x_1 = -2$ kennen wir eine Nullstelle von $G(x)$. Die Polynomdivision $G(x)/(x+2)$ liefert den quadratischen Term $-x^2 + 13x - 30$ mit den weiteren Nullstellen $x_2 = 3$ und $x_3 = 10$. Damit ist $(3, 10)$ die Gewinnzone, denn $G(4) = 36 \geq 0$.
- Mit $G'(x) = -3x^2 + 22x - 4$ und $G''(x) = -6x + 22$ folgt $G'\left(\frac{11+\sqrt{109}}{3}\right) = 0$ und $G''\left(\frac{11+\sqrt{109}}{3}\right) = -2\sqrt{109} < 0$. Also ist $\left(\frac{11+\sqrt{109}}{3}, G\left(\frac{11+\sqrt{109}}{3}\right)\right)$ bzw. $\left(\frac{11+\sqrt{109}}{3}, \frac{2\left(323+109\sqrt{109}\right)}{27}\right)$ das Gewinnmaximum. Eine Näherung dafür wäre $(7.147, 108.222)$.
- Hier zur Veranschaulichung der zugehörige aber stark gestauchte Graph der Gewinnfunktion:



Aufgabe 6.1b: Als Betriebsoptimum bezeichnet man die Produktionsmenge x_o für die die Grenzkosten $\frac{dK(x)}{dx}$ gleich den Stückkosten $\frac{K(x)}{x}$ sind. Finden Sie einen Näherungswert für x_o.

Lösung: Wegen $K'(x) = \frac{K(x)}{x}$ haben wir nach reellen Nullstellen der Funktion $f(x) := xK'(x) - K(x) = 2x^3 - 11x^2 - 60$ zu suchen. Mit Newton gilt dann

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^3 - 11x_n^2 - 60}{6x_n^2 - 22x_n} = \frac{1}{2}\,\frac{(4x_n - 11)x_n^2 + 60}{x_n(3x_n - 11)}$$

Starten wir die Iteration mit $x_0 = 6$, so folgt

$$\begin{array}{lcccc}
x_0 & = & 6 & = & 6 \\
x_1 & = & \frac{44}{7} & = & 6.\overline{285714} \\
x_2 & = & \frac{53061}{8470} & \approx & 6.264580873671\ldots \\
x_3 & = & \frac{61951327823059}{9889334255570} & \approx & 6.264458882878\ldots \\
x_4 & = & \frac{295797132876037780209808120824943035973323}{47218305459044226602133487604371495997410} & \approx & 6.264458878826\ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\lim\limits_{n\to\infty} x_n & = & \frac{11+\sqrt[3]{4571+36\sqrt{14755}}+\sqrt[3]{4571-36\sqrt{14755}}}{6} & \approx & 6.264458878826\ldots
\end{array}$$

Da sich um das Betriebsoptimum herum die Kosten näherungsweise im Bereich der Stückkosten bewegen, kann man dort leicht die Produktion steigern oder herunterfahren und so auf die sich ständig verändernde Nachfrage reagieren. Massive Produktionserhöhungen oder Reduzierungen sind nur durch erheblich größere Kostensteigerungen z. B. wegen einer Erweiterung der Produktionsanlagen bzw. Arbeitsplatzabbau verbunden mit zu finanzierenden Sozialplänen möglich.

Aufgabe 6.2: Versuchen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens Näherungen für den $\log_3 37$ zu gewinnen.

Lösung: Wir setzen $x = \log_3 37$, folgern $3^x = 37$ und definieren $f(x) := 3^x - 37$. Mit Newton gilt dann

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3^{x_n} - 37}{3^{x_n}\ln 3} \quad \text{bzw.} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\ln 3}\left(1 - \frac{37}{3^{x_n}}\right)$$

Wenn man einen Logarithmus näherungsweise errechnen möchte, dann ist es sicher unpassend wenn in der Näherungsformel wieder ein Logarithmus benötigt wird. Berechnen wir also $z = \ln 3$ mithilfe von Newton. Mit $e^z = 3$ wenden wir das Newton-Verfahren auf die Funktion $g(x) = e^z - 3$ und erhalten die Approximationsformel

$$z_{n+1} = z_n - \frac{e^{z_n} - 3}{e^{z_n}} \quad \text{bzw.} \quad z_{n+1} = z_n - 1 + \frac{3}{e^{z_n}}$$

Hier wird die besondere Bedeutung der Zahl e und der natürlichen Logarithmen erkennbar. Hat man die natürlichen Logarithmen mit einer gewünschten Genauigkeit bestimmt, dann lassen sich vermöge

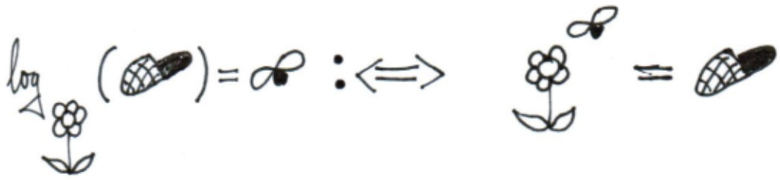
$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$$

alle anderen Logarithmen errechnen.

Aufgabe 7.1: Den Schülern kann man, ausgehend von der Definition des Logarithmus und den Potenzgesetzen, die Identität $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$ leicht herleiten. Finden Sie dazu einen Weg.

Bemerkung: Schüler, so habe ich es immer wieder erlebt, tun sich mit der Definition des Logarithmus oft schwer. Hilfreich war dann meine etwas alberne, aber doch gern angenommene und einprägsame Definition.

Definition: Seien *Blümchen, Fliege* und *Schlappen* positive reelle Zahlen und *Blümchen* ungleich 1. Dann und nur dann ist der Logarithmus von *Schlappen* zur Basis *Blümchen* gleich der *Fliege,* wenn *Blümchen* hoch *Fliege* gleich dem *Schlappen* ist.



Folgerung: $\log_7(11) \notin \mathbb{Q}$

Beweis: Nimmt man an, dass der $\log_7(11)$ eine rationale Zahl ist, dann muss es positive ganze Zahlen m und n geben mit $\log_7(11) = \frac{m}{n}$ bzw. $7^{\frac{m}{n}} = 11$. Potenziert man die letzte Gleichung mit n, so folgt der Widerspruch mit $7^m = 11^n$.■

Aufgabe 7.2: Beweisen Sie bitte die Irrationalität von $log_{30}48$.

Zur Einführung der Logarithmen fand ich es immer sinnvoll einen Blick auf die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Rechenarten zu werfen. Die folgende Übersicht mag dem dienen.

Addieren

$a + b = c$	Summand + Summand = Summe
ist kommutativ	$a + b = b + a$
ist assoziativ	$a + (b + c) = (a + b) + c$

Subtrahieren

$c - b = a$ $c - a = b$	Minuend − Subtrahend = Differenz
ist nicht kommutativ	$12 - 4 \neq 4 - 12$
ist nicht assoziativ	$12 - (4 - 3) \neq (12 - 4) - 3$

Multiplizieren

ist eine vereinfachte Schreibweise für die Addition gleicher Summanden

$a \cdot b = c$	Faktor • Faktor = Produkt
ist kommutativ	$a \cdot b = b \cdot a$
ist assoziativ	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Dividieren

$c : b = a$ $c : a = b$	Dividend : Divisor = Quotient
ist nicht kommutativ	$12 : 4 \neq 4 : 12$
ist nicht assoziativ	$12 : (4 : 3) \neq (12 : 4) : 3$

Potenzieren

ist eine vereinfachte Schreibweise für die Multiplikation gleicher Faktoren

$a^b = c$	
ist nicht kommutativ	$2^3 \neq 3^2$
ist nicht assoziativ	$(2^3)^2 \neq 2^{(3^2)}$

Radizieren

$a = \sqrt[b]{c}$	
ist nicht kommutativ	$\sqrt[3]{8} \neq \sqrt[8]{3}$
ist nicht assoziativ	$(64^{1/3})^{1/2} \neq 64^{((1/3)^{1/2})}$

Logarithmieren

$b = \log_a(c)$	Logarithmus =	$\log_{\text{Basis}}(\text{Numerus})$
ist nicht kommutativ	$\log_3(8) \neq \log_8(2)$	

Da das Potenzieren nicht kommutativ ist, gibt es mit dem Radizieren und dem Logarithmieren zwei inverse Rechenarten. Kennt man zu einer gegebenen Basis die Logarithmen, dann gestatten die Logarithmengesetze

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ **2.** $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$

3. $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$ **4.** $\log_a(\sqrt[y]{x}) = \frac{1}{y} \log_a(x)$

eine erhebliche Reduzierung der Rechenarbeit. Die Multiplikation konnte durch die Addition der Logarithmen, das Radizieren durch Dividieren usw. ersetzt werden. In der frühen Neuzeit 1624 veröffentlichte Henry Briggs, aufbauend auf den Ideen von John Napier, die ersten Logarithmentafeln mit der Basis 10. Noch 1970 hatte ich als Soldat der Bundeswehr mithilfe von Briggschen-Logarithmentafeln die Position angenommener feindlicher Geschütze zu errechnen. Die ersten elektronischen Taschenrechner kamen mir erstmals 1975 zu Gesicht. Wir stehen wohl gegenwärtig nach Frühgeschichte, Altertum, Mittelalter und Neuzeit am Anfang einer neuen Großepoche, die durch die Entdeckung der Quantenmechanik und der Relativitätstheorie vor gut hundert Jahren eingeläutet wurde. Zur diesbezüglichen geisteswissenschaftlichen Orientierung empfehle ich die Lektüre des Büchleins *'Das Ende der Neuzeit'* von Romano Guardini [10].

Aufgabe 7.3: Leiten Sie bitte, ausgehend von den Potenzgesetzen, die Logarithmengesetze Nummer **2** und **3** her.

Hier noch einmal eine Erinnerung an die antiken Vorstellungen der Pythagoreer um dann die neuzeitliche Konstruktion der temperierten Stimmung, so wie wir sie heute nutzen, in der Musik zu begreifen. Andreas Werckmeister (1645-1706) und J. S. Bach sind wohl die bekanntesten Namen, die für diese Entwicklung vom Monochord hin zu Orgel und Klavier stehen.

Werden nämlich Teile der Saiten zweier gleichgebauter Monochorde angeschlagen, so hört man i. A. eine Dissonanz. Es muss wohl eine ungemein beeindruckende Entdeckung gewesen sein, als die Pythagoreer erkannten, dass sich nur bei bestimmten einfachen Teilungsverhältnissen konsonante Intervalle ergaben. Wohlklingende (konsonante) Intervalle hört man, wenn im Vergleich zur ganzen Saite $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$oder $\frac{4}{5}$ einer weiteren Saite zum Schwingen bringt. Diese Zahlenverhältnisse wurden auf die Abstände der Planeten übertragen, egal ob es sich um das Weltbild des Philolaos, ein geo- oder der ein heliozentrisches Weltbild handelte. Alle diese Kosmologien wurden in der antiken griechischen Kultur diskutiert. Geblieben ist bis zum Beginn der Neuzeit der Begriff der *Sphärenharmonie*, das geozentrische Weltbild des Ptolemäus und bis heute die Vorstellung, dass das Geheimnis der Welt nicht in einem Urstoff sondern in unveränderlichen zahlenmäßigen Gesetzen vorhanden ist. R. Taschner [9] schreibt dazu:

Diese Einsicht fasst Philolaos, ein Schüler des Pythagoras, in wunderbare Worte: die Seele sei die Zahlenharmonie des Körpers, sie gehöre zu ihm wie die Töne zum Musikinstrument, das sie erzeugt.

Zwei gleichzeitig erklingende Töne bilden ein Intervall. Bringt man die ganze Saite eines Monochordes gegenüber einer auf $\frac{2}{3}$ verkürzten Saite eines weiteren Monochordes zum Schwingen, so hört man eine Quinte. Die Pythagorer beschrieben ein Intervall nach den Längenverhältnissen der schwingenden Seiten. Wir nutzen heute den Quotienten der Frequenzen zweier Töne um ein Intervall zu erfassen. Dabei wird die Frequenz des höheren Tones im Zähler notiert. So gilt dann für

die Oktave $\frac{f_c}{f_C} = \frac{2}{1} = 2$ und die reine Quinte $\frac{f_G}{f_C} = \frac{3}{2}$.

Der Addition der Intervalle entspricht dabei die Multiplikation der Frequenzverhältnisse. Geht man vom G eine weitere Quinte nach oben, so gilt

$$\frac{f_d}{f_C} = \frac{f_G}{f_C} \cdot \frac{f_d}{f_G} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} > 2.$$

Der Ton d liegt damit über der Oktave $\frac{f_c}{f_C}$. Wenn man ihn eine Oktave tiefer setzt, erhält man vermöge

$$\frac{f_D}{f_C} = \frac{f_d}{f_C} / \frac{f_d}{f_D} = \frac{9}{4} / \frac{2}{1} = \frac{9}{8} = 1.125$$

den Ton D. Das Intervall $\frac{f_D}{f_C} = \frac{9}{8}$ heißt Sekunde und ist ein Ganztonschritt innerhalb der pythagoreischen Tonleiter. Diese Tonleiter wird dadurch erzeugt, dass man von C ausgehend Quinten (Q) auf Quinten setzt und nach Bedarf eine Oktave (Ok) zurückgeht. Hier die Intervalle der so erzeugten pythagoreischen Tonleiter über dem C.

Intervall von C bis		Definition		Frequenzverhältnis				Intervallname
c	$=$	Ok	$=$	2	$=$	2		Oktave
H	$=$	$5Q - 2Ok$	$=$	$\frac{243}{128}$	$\approx$	1.8984		große Septime
A	$=$	$3Q - Ok$	$=$	$\frac{27}{16}$	$=$	1.6875		große Sexte
G	$=$	Q	$=$	$\frac{3}{2}$	$=$	1.5		Quinte
F	$=$	$Ok - Q$	$=$	$\frac{4}{3}$	$\approx$	1.3333		Quarte
E	$=$	$4Q - 2Ok$	$=$	$\frac{81}{64}$	$\approx$	1.2656		große Terz
D	$=$	$2Q - Ok$	$=$	$\frac{9}{8}$	$=$	1.125		Sekunde
C	$=$	1	$=$	1	$=$	1		Prim

Bemerkung *Seit Philolaos wurden im antiken Griechenland die Oktave mit "diploón" (doppelt), die Quinte mit "hēmiólion" (Hälfte und Ganzes), die Quarte mit "epitriton" (ein Drittel dazu) bezeichnet. Den Ganztonschritt ($\frac{9}{8}$) nannte man "epógdoon".*

Die folgende Tabelle zeigt auch die Intervalle zwischen C und den zugehörigen Halbtönen der pythagoreischen Tonleiter. Sie werden vermöge

$$\mathbf{f(Q, Ok)} := \left(\frac{3}{2}\right)^{\mathbf{Q}} 2^{\mathbf{Ok}}$$

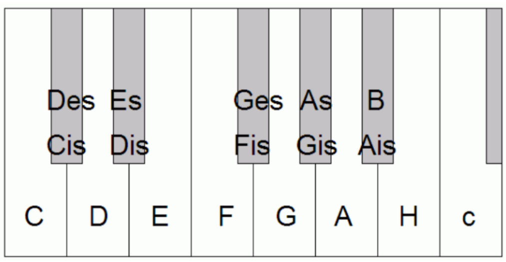
erzeugt. Das fettgedruckte $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Ok}$ steht hier für die Anzahl der Quinten bzw. Oktaven. Zugleich sind diese Intervalle in der heutigen Centnotation der *'temperierten Stimmung'* dargestellt. Nach der Addition von 12 Quinten und Subtraktion von 7 Oktaven landet man leider bei His und nicht bei dem **C**. Der Quintenzirkel ist also nicht geschlossen. Dieser Umstand führte rund zweitausend Jahre später zur Konstruktion der temperierten Stimmung. Diese unterteilt die Oktave in 1200 Teilintervalle namens Cent. Damit ist

$$1 \text{ Cent} = \sqrt[1200]{2}.$$

Dies erlaubt es Halbtöne wie Gis und As bei der Klaviertastatur einer einzigen Taste zuzuordnen. Das von zwei benachbarten Tasten gelieferte Intervall beträgt so stets 100 Cent.

	$\mathbf{f(Q,Ok)} =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{\mathbf{Q}} 2^{\mathbf{Ok}}$		**Cent**		**Cent**
c	$f(\mathbf{0},\mathbf{1}) =$	2	$= \mathbf{2}$	1200	$=$	$\mathbf{1200}$
H	$f(\mathbf{5},\mathbf{-2}) =$	$\frac{243}{128}$	$\approx \mathbf{1.8984}$	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{243}{128}$	$\approx$	$\mathbf{1109.8}$
Ais	$f(10,-5) =$	$\frac{59049}{32768}$	≈ 1.802	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{59049}{32768}$	$\approx$	1019.6
B	$f(-2,2) =$	$\frac{16}{9}$	≈ 1.7778	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{16}{9}$	$\approx$	996.09
A	$f(\mathbf{3},\mathbf{-1}) =$	$\frac{27}{16}$	$= \mathbf{1.6875}$	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{27}{16}$	$\approx$	$\mathbf{905.87}$
Gis	$f(8,-4) =$	$\frac{6561}{4096}$	≈ 1.6018	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{6561}{4096}$	$\approx$	815.64
As	$f(-4,3) =$	$\frac{128}{81}$	≈ 1.5802	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{128}{81}$	$\approx$	792.18
G	$f(\mathbf{1},\mathbf{0}) =$	$\frac{3}{2}$	$= \mathbf{1.5}$	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{3}{2}$	$\approx$	$\mathbf{701.96}$
Fis	$f(6,-3) =$	$\frac{729}{512}$	≈ 1.4238	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{729}{512}$	$\approx$	611.73
Ges	$f(-6,4) =$	$\frac{1024}{729}$	≈ 1.4047	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{1024}{729}$	$\approx$	588.27
F	$f(\mathbf{-1},\mathbf{1}) =$	$\frac{4}{3}$	$\approx \mathbf{1.3333}$	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{4}{3}$	$\approx$	$\mathbf{498.04}$
E	$f(\mathbf{4},\mathbf{-2}) =$	$\frac{81}{64}$	$\approx \mathbf{1.2656}$	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{81}{64}$	$\approx$	407.82
Dis	$f(9,-5) =$	$\frac{19683}{16384}$	≈ 1.2014	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{19683}{16384}$	$\approx$	317.60
Es	$f(-3,2) =$	$\frac{32}{27}$	≈ 1.1852	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{32}{27}$	$\approx$	294.13
D	$f(\mathbf{2},\mathbf{-1}) =$	$\frac{9}{8}$	$= \mathbf{1.125}$	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{9}{8}$	$\approx$	$\mathbf{203.91}$
Cis	$f(7,-4) =$	$\frac{2187}{2048}$	≈ 1.0679	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{2187}{2048}$	$\approx$	113.69
Des	$f(-5,3) =$	$\frac{256}{243}$	≈ 1.0535	$\frac{1200}{\ln 2} \ln \frac{256}{243}$	$\approx$	90.225
His	$f(12,-7) =$	$\frac{531441}{524288}$	≈ 1.0136	$1200 \frac{\ln \frac{531441}{524288}}{\ln 2}$	$\approx$	23.46
C	$f(\mathbf{0},\mathbf{0}) =$	1	$= \mathbf{1}$	0	$=$	$\mathbf{0}$

Die temperierte Stimmung erlaubt es also eine Oktave auf dem Klavier mit 12 Tasten abzudecken.



Hier die Darstellung aller 88 Tasten eines Klavieres, das damit über sieben Oktaven reicht.

Der berühmte Sänger Ivan Rebroff (Hans Rolf Rippert, †2008) hatte einen Rekordstimmumfang von $4\frac{1}{2}$ Oktaven.

Der Standard-Kammerton ist a' und hat die Frequenz von $440\,\mathrm{Hz}$. Geht man von dem Kammerton eine Oktave nach links, so gelangt man zu dem Ton a mit der Frequenz $\frac{1}{2}\cdot 440\,\mathrm{Hz} = 220\,\mathrm{Hz}$. Geht man um eine Oktave nach rechts zu a'', so verdoppelt sich die Frequenz. Also gilt

$$\begin{array}{llll} f_{,,A} = 27.5\,\mathrm{Hz} & f_{,A} = 55\,\mathrm{Hz} & f_{A} = 110\,\mathrm{Hz} & f_{a} = 220\,\mathrm{Hz} \\ f_{a'} = \mathbf{440}\,\mathrm{Hz} & f_{a''} = 880\,\mathrm{Hz} & f_{a'''} = 1760\,\mathrm{Hz} & f_{a''''} = 3520\,\mathrm{Hz} \end{array}$$

Der höchste Ton des Klavieres c''''' liegt 300 Cent über a''''. Seine Frequenz bestimmt sich mit

$$\frac{f_{c'''''}}{f_{a''''}} = \frac{f_{c'''''}}{3520\,\mathrm{Hz}} = 300\mathrm{Cent} = \left(\sqrt[1200]{2}\right)^{300} = \sqrt[4]{2} \;\text{ zu }\; f_{c'''''} = \sqrt[4]{2}\cdot 3520\,\mathrm{Hz} \approx 4186.009\,\mathrm{Hz}$$

Dazu eine Übersicht zu den Tonfrequenzen im Intervall von c' bis c'' berechnet vermöge

$$F(k) = \left(\sqrt[1200]{2}\right)^{100\cdot k} 440\,\mathrm{Hz}$$

$$\begin{bmatrix} c'' \\ h' \\ ais' \\ a' \\ gis' \\ g' \\ fis' \\ f' \\ e' \\ dis' \\ d' \\ cis' \\ c' \end{bmatrix} = F\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \\ -6 \\ -7 \\ -8 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 440\sqrt[4]{2}\,\mathrm{Hz} \\ 440\sqrt[6]{2}\,\mathrm{Hz} \\ 440\sqrt[12]{2}\,\mathrm{Hz} \\ \mathbf{440}\,\mathrm{Hz} \\ 220\times 2^{\frac{11}{12}}\,\mathrm{Hz} \\ 220\times 2^{\frac{5}{6}}\,\mathrm{Hz} \\ 220\times 2^{\frac{3}{4}}\,\mathrm{Hz} \\ 220\times 2^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{Hz} \\ 220\times 2^{\frac{7}{12}}\,\mathrm{Hz} \\ 220\sqrt{2}\,\mathrm{Hz} \\ 220\times 2^{\frac{5}{12}}\,\mathrm{Hz} \\ 220\sqrt[3]{2}\,\mathrm{Hz} \\ 220\sqrt[4]{2}\,\mathrm{Hz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 523.2511306\,\mathrm{Hz} \\ 493.8833013\,\mathrm{Hz} \\ 466.1637615\,\mathrm{Hz} \\ \mathbf{440}\,\mathrm{Hz} \\ 415.3046976\,\mathrm{Hz} \\ 391.995436\,\mathrm{Hz} \\ 369.9944227\,\mathrm{Hz} \\ 349.2282314\,\mathrm{Hz} \\ 329.6275569\,\mathrm{Hz} \\ 311.1269837\,\mathrm{Hz} \\ 293.6647679\,\mathrm{Hz} \\ 277.182631\,\mathrm{Hz} \\ 261.6255653\,\mathrm{Hz} \end{bmatrix}$$

Bemerkungen:

- Jeder sollte die hier vorgestellten Lösungen, Herleitungen und Beweise beherrschen.
- Die Konstruktion der pythagoreischen und der temperierten Stimmung sollte erklärt werden können. Es ist sicher sinnvoll einige Tabellenwerte nachzurechnen.
- Was haben die Tonleitern eigentlich mit Logarithmen zu tun?
- Die Lösungen der hier gestellten Aufgaben werden im Text 08 vorgestellt.

Literatur:

[9] Taschner, Rudolf, Der Zahlen gigantische Schatten, München, dtv, 1993

[10] Guardini, Romano, Das Ende der Neuzeit, Basel, Heß Verlag,1950