

Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

Text 08 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

Aufgabe 7.1: Den Schülern kann man, ausgehend von der Definition des Logarithmus und den Potenzgesetzen, die Identität

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$$

leicht herleiten. Finden Sie dazu einen Weg.

Lösung: Für den $\log_b a$ gilt definitionsgemäß

$$b^{\log_b a} = a$$

Ersetzt man rechts vom Gleichheitszeichen das b durch $e^{\ln b}$ und links das a durch $e^{\ln a}$ dann gilt

$$(e^{\ln b})^{\log_b a} = e^{\ln a}$$

und es folgt mit der Potenzrechenregel $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$$e^{\ln b \cdot \log_b a} = e^{\ln a} \quad \text{bzw.} \quad \ln b \cdot \log_b a = \ln a$$

Die letzte Gleichung durch $\ln b$ dividiert liefert dann die angestrebte Identität. ■

Aufgabe 7.2: Beweisen Sie bitte die Irrationalität von $\log_{30} 48$.

Beweis: Annahme: $\log_{30} 48 = \frac{a}{b}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a und b . und. Dann gilt mit $a \geq 1$

$$30^{\frac{a}{b}} = 48 \quad \text{bzw.} \quad 30^a = 48^b \quad \text{und weiter} \quad 2^a \cdot 3^a \cdot 5^a = 2^{4b} 3^b = 48^b$$

bzw.

5 ist ein Teiler von 48^b .

im Widerspruch zu $48 \bmod 5 = 3$. ■

Aufgabe 7.3a: Es gilt mit der Potenzrechenregel $a^n / a^m = a^{n-m}$

$$a^{\log_a(x/y)} = x/y = a^{\log_a(x)} / a^{\log_a(y)} = a^{\log_a x - \log_a y}$$

und also $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$. ■

Aufgabe 7.3b: Es gilt mit der Potenzrechenregel $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$$a^{\log_a(x^y)} = x^y = (a^{\log_a x})^y = a^{y \log_a x}$$

und also $\log_a(x^y) = y \log_a x$. ■

Nachfolgend einige Bemerkungen zur Stochastik im Schulunterricht.

Zunächst bitte ich Sie, die wenigen Zeilen unter dem Titel *Grundbegriffe Stochastik* sorgfältig zu lesen. Ich habe diesen kleinen Aufsatz für die zahlreichen Studenten geschrieben, die sich gar nicht oder nur unzureichend an die in der Schule gelehrt Wahrscheinlichkeitsbegriffe erinnern konnten, aber auch zur Auffrischung für die Erinnerungsstarken. In der Geometrie versucht man Punktmengen wie einer Strecke, einem Rechteck oder einer Kugel eine Maßzahl wie Streckenlänge, Flächeninhalt oder Rauminhalt zuzuordnen. Das ist leider nicht immer möglich, denn man kann zeigen, dass es Punktmengen gibt, die sich jedem Versuch, sie auszumessen, verweigern. Den Punkten der Geometrie entsprechen in der Stochastik die Ergebnisse eines Zufallsexperimentes. Ein Ereignis ist dann eine Menge von Ergebnissen, wie eine

Quadratfläche als eine Menge von Punkten gedeutet werden kann. Wie man in der Geometrie einer Fläche einen Flächeninhalt zuordnet, so versucht man nun in der Stochastik Ereignissen eine Maßzahl zuzuordnen. Damit gründet die Stochastik auf der Mengenlehre und der Maßtheorie. Das Maß in der Stochastik heißt Wahrscheinlichkeit. Die Existenz von nicht messbaren Mengen machten die Definition des Begriffes der Wahrscheinlichkeit etwas aufwendig. In der Unter- und Mittelstufe reicht es allerdings immer aus, den Umgang mit Laplace-Wahrscheinlichkeiten und einfachen geometrischen Wahrscheinlichkeiten zu erlernen. In der Oberstufe sollte man aber die kolmogorowsche Definition der Wahrscheinlichkeit nicht nur kennen, sondern auch wissen, warum sie nicht so ganz einfach formuliert werden kann. Den Nachnamen des russischen Mathematikers Kolmogorow (1903-1987) finden sie in der Literatur auch als Kolmogoroff oder Kolmogorov geschrieben. Die Unterschiede beruhen auf der lautmalerischen Übertragung des russischen Nachnamens Колмогоров.

Bemerkungen zum Mengenbegriff

Georg Cantor (1845-1918), der Begründer der Mengenlehre, lehrte:

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Diese naive Definition der ‚Menge‘ ist für viele schulische Bereiche wohl ausreichend, aber sie genügt nicht den Anforderungen der Mathematik. Cantor hat einige aus dieser Definition folgende Widersprüche (Antinomien) erkannt und eine axiomatische Definition angestrebt. Heute wird der Begriff ‚Menge‘ mehrheitlich axiomatisch nach Zermelo und Fraenkel definiert. Die bekannteste Antinomie der naiven Mengenlehre dürfte wohl die *Russellsche Antinomie* sein. Nach *Bertrand Russell* führt die Frage, ob die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, Element von sich ist oder nicht, unmittelbar zu einem Widerspruch. Denn wenn sie sich selbst enthält, kann sie ja nicht die Menge aller Mengen sein, die sich nicht selbst als Element enthalten. Wenn sie sich jedoch nicht enthält, dann muss sie sich enthalten, da sie ja die Menge aller Mengen ist, die sich nicht selbst als Element enthalten. Bertrand Russell hat diese Antinomie sehr anschaulich dargestellt. Ich versuche dies sinngemäß aber deutlich verändert wiederzugeben:

In einem kleinen Dorf gibt es genau eine Friseurin, die alle Frauen des Dorfes frisiert, die sich nicht selbst frisieren. Fragt man danach, ob sie sich selbst frisiert, dann muss man dies verneinen, denn sie frisiert ja nur die Frauen, die sich nicht selbst frisieren. Wenn sie sich aber nicht selbst frisiert, dann muss sie sich frisieren, denn sie frisiert ja alle Frauen des Dorfes, die sich nicht selbst frisieren.

In der axiomatisch begründeten Mengenlehre von Zermelo und Fraenkel ist eine Definition wie die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, nicht möglich.

Mächtigkeit von Mengen

Ob in einem Klassenraum mehr Schüler oder Stühle sind, kann man auf zweierlei Art beantworten. Man bestimmt die Anzahl der Schüler und die der Stühle oder man bittet die Schüler sich auf einen Stuhl zu setzen. Findet jeder Schüler einen Stuhl und bleibt kein Stuhl frei, dann gibt es eine eindeutige Zuordnung (Bijektion) zwischen der Menge der Schüler und der Menge der Stühle.

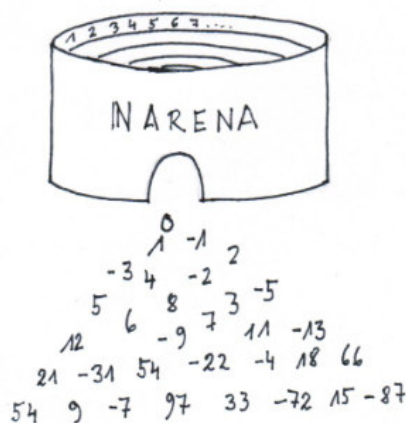
Definition: Zwei Mengen M und N heißen gleichmächtig genau dann, wenn es wenigstens eine Bijektion B gibt mit $B : M \rightarrow N$.

Die Definition der Gleichmächtigkeit befreit uns vom Anzahlbegriff, der ja nur für Mengen mit einer endlichen Zahl von Elementen sinnvoll ist, und macht es möglich, auch Mengen mit unendlich vielen Elementen zu vergleichen. Bezeichnet man die Mächtigkeit einer Menge M mit $\text{card}(M)$ oder $|M|$, so gilt

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| \quad \text{und} \quad |\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$$

$\mathcal{P}(M)$ steht dabei für die Menge aller Teilmengen von M und wird als Potenzmenge von M bezeichnet.

Symbolisiert man die Menge der ganzen Zahlen mit $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, dann fällt es vielen Schüler schwer einzusehen, dass diese und $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ gleichmächtig sein sollen. Von den Mengen mit endlich vielen Elementen ist man es ja gewohnt, dass eine echte Teilmenge stets kleiner ist als die gesamte Menge. Das nachstehende Bild mit der folgenden Sitzordnung konnte sie dann doch überzeugen. Dort sieht man, wie die ganzen Zahlen in die $\mathbb{N}$ -ARENA strömen, die für jede natürliche Zahl genau einen Sitzplatz anbietet.

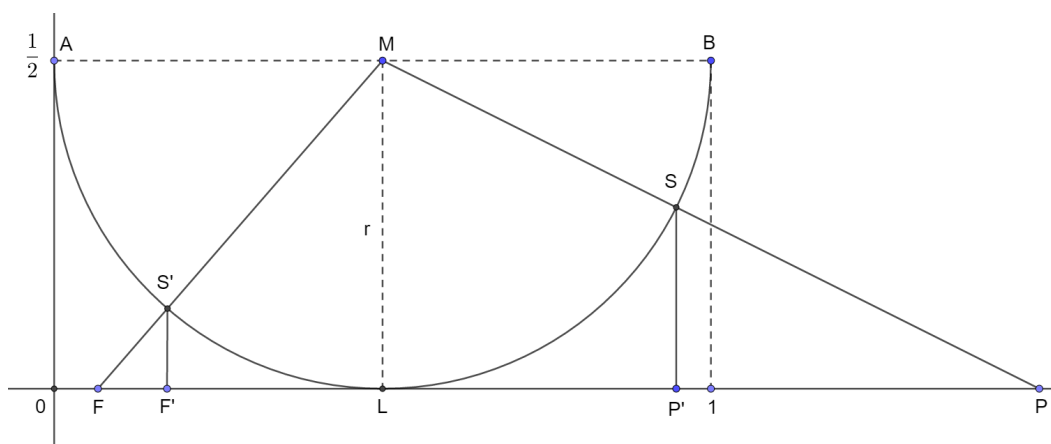


	1	2	3	4	5	6	...
1	$\frac{1}{1} \rightarrow$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1} \rightarrow$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1} \rightarrow$	$\frac{6}{1}$	
2	$\frac{1}{2}$	$[\frac{2}{2}]$	$\frac{3}{2}$	$[\frac{4}{2}]$	$\frac{5}{2}$		
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$[\frac{3}{3}]$	$\frac{4}{3}$			
4	$\frac{1}{4}$	$[\frac{2}{4}]$	$\frac{3}{4}$				
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$					
6	$\frac{1}{6}$						
...							

Man sagt, die Mengen M mit $|M| = |\mathbb{N}|$ haben *abzählbar unendlich* viele Elemente. Die Menge der reellen Zahlen hingegen hat *überabzählbar* viele Elemente. Dazu zwei kleine Sätze.

Satz 8.1: Die Menge der reellen Zahlen im Intervall $(0, 1)$ ist gleichmächtig der Menge reellen Zahlen.

Beweis: Jede reelle Zahl kann man sich als einen Punkt auf dem Zahlenstrahl durchdenken. Man muss nun eine Bijektion finden, die jedem Punkt P des Zahlenstrahles genau einen Punkt P' im Intervall $(0, 1)$ zuordnet. Das gelingt mit der folgenden Skizze.



Über dem Intervall $(0, 1)$ bezeichnen wir den Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mit M . Der Halbkreisbogen um M mit Radius $r = \frac{1}{2}$ berührt dann die x -Achse in L und die y -Achse in A . Punkte auf der Zahlengeraden wie P und F werden auf die Punkte P' bzw. F' innerhalb des Intervalles $(0, 1)$ eineindeutig abgebildet, indem man die Strecken $\overline{PM}$ und $\overline{FM}$ einzeichnet. Von den Schnittpunkten S und S' der Strecken mit dem Kreisbogen fällt man dann jeweils das Lot auf die x -Achse. Die Lotfußpunkte P' und F' sind dann die erwünschten Bildpunkte. Die Eineindeutigkeit sollte man mit der Lösung von Aufgabe 8.1 erkennen.

Aufgabe 8.1: Geben Sie bitte ein geometrisches Verfahren an, das von P' zu P führt.

Aufgabe 8.2: Wenn P die Koordinatendarstellung $(p, 0)$ und P' die Koordinatendarstellung $(p', 0)$ hat, dann muss sich p' aus p rechnerisch ermitteln lassen. Finden Sie eine zugehörige Rechenvorschrift $p' = p'(p)$ und bestimmen Sie $p'(2)$.

Satz 8.2: Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis: Das zweite Cantorsche Diagonalverfahren erlaubt, es die Ungleichung $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ zu beweisen. Dazu hatten wir zunächst gezeigt, dass die Menge aller Punkte P des Zahlenstrahles und die Menge aller Punkte P' des offenen Intervalles $(0, 1)$ gleichmächtig sind. Wir zeigen nun, dass schon die Menge der reellen Zahlen im Intervall $(0, 1)$ überabzählbar ist. Jedem Punkt P' lässt sich nun genau eine reelle Zahl b_k zuordnen. Denkt man sich diese Zahlen in Dezimalschreibweise mit Ziffern $a_{k,m}$ notiert, dann muss man bedenken, dass diese Notation nicht eindeutig ist. So ist z.B. $0.3\bar{9} = 0.4$ bzw. $0.3\bar{9} = 0.4\bar{0}$. Um die Eindeutigkeit der Zahldarstellung zu sichern, seien nachstehend die Neunerperioden untersagt. Die Annahme, dass die reellen Zahlen zwischen Null und Eins abzählbar wären, führt nun unmittelbar zu einem Widerspruch. Denn dann müssten alle diese Zahlen im folgenden Schema über der gestrichelten Linie in der vorletzten Zeile aufgelistet sein.

$$\begin{array}{rcll}
 b_1 & = & 0, & \mathbf{a_{1,1}} \ a_{1,2} \ a_{1,3} \ \cdots \ a_{1,n} \ \cdots \\
 b_2 & = & 0, & a_{2,1} \ \mathbf{a_{2,2}} \ a_{2,3} \ \cdots \ a_{2,n} \ \cdots \\
 b_3 & = & 0, & a_{3,1} \ a_{3,2} \ \mathbf{a_{3,3}} \ \cdots \ a_{3,n} \ \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \\
 b_n & = & 0, & a_{n,1} \ a_{n,2} \ a_{n,3} \ \cdots \ \mathbf{a_{n,n}} \ \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\
 d & = & 0, & d_1 \ d_2 \ d_3 \ \cdots \ d_n \ \cdots
 \end{array}$$

Wählt man die Ziffern d_n einer Zahl d jedoch gemäß der folgenden Vorschrift

$$d_n = \begin{cases} 7 & \text{wenn } a_{n,n} \neq 7 \\ 3 & \text{wenn } a_{n,n} = 7 \end{cases}$$

aus, so ist d sicher eine Zahl zwischen Null und Eins aber ungleich jeder Zahl b_n .

- Jeder sollte die hier vorgestellten Lösungen, Herleitungen und Beweise beherrschen.
- Die Gleichung $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ habe ich hier ohne Beweis vorgestellt. Dazu werden ich im Text 09 noch eine Erläuterung liefern.
- Sollten Sie zu den *Grundbegriffen Stochastik* Fragen haben, dann fragen Sie.

Literatur:

- [11] Kamke, Erich, Mengenlehre, Berlin, Walter de Gruyter 1971
 [12] Fisz, Marek, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1976
 [13] Meschkowski, Herbert, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mannheim, Bibliographisches Institut 1968