

Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

Text 10 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

Aufgabe 9.1: Wenn ein idealer regelmäßiger Tetraeder als Würfel genutzt wird, gilt die Fläche als geworfen, die auf dem Boden zu liegen kommt. Die vier Flächen eines solchen Tetraeders seien nun mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 beschriftet. Wir betrachten das Zufallsexperiment *'Einmaliges Werfen dieses Tetraeders'*.

9.1a: Notieren Sie bitte die zugehörige **Ergebnismenge** Ω für dieses Zufallsexperiment.

Lösung:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

9.1b: Notieren Sie bitte auch die Menge $\mathcal{P}$ aller denkbaren **Ereignisse** E für dieses Zufallsexperiment...

Lösung:

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{cccccc} & & & \emptyset & & \\ & \{1\} & \{2\} & & \{3\} & \{4\} \\ \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{1, 4\} & & \{2, 3\} & \{2, 4\} & \{3, 4\} \\ & \{2, 3, 4\} & \{1, 3, 4\} & & \{1, 2, 4\} & \{1, 2, 3\} & \\ & & & \Omega & & & \end{array} \right\}$$

Das Ereignis man würfelt eine 3 wird durch die Menge $\{3\}$ dargestellt. Das Ereignis man würfelt eine 3 oder eine 4 wird durch die Menge $\{3, 4\}$ dargestellt.

9.1c: ...und die zugehörigen **Wahrscheinlichkeiten** dieser Ereignisse.

Lösung: Die folgende Anordnung der Wahrscheinlichkeiten entspricht den oben dargestellten Ereignissen. So ist z. B. $p(\{2, 4\}) = \frac{|\{2, 4\}|}{|\{1, 2, 3, 4\}|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Die Laplace-Wahrscheinlichkeiten folgen aus der Definition $p(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

9.1d: Wenn man nun anstelle des idealen regelmäßigen Tetraeders einen besonderen unregelmäßigen Tetraeder zum Würfeln genutzt hätte, was hätte man dann in den Aufgaben 9.1a bis 9.1c als Lösung notieren müssen, wenn die Wahrscheinlichkeit p_n die Zahl n zu werfen mit

$$p_n := \frac{2n-1}{16}$$

bekannt wäre.

Lösung: Die Lösungen von **1a** und **1b** gelten auch hier unverändert. Die definierte Wahrscheinlichkeit p_n liefert aber dann diese Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \frac{0}{16} & & & & 0 \\
 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & \\
 \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{8}{16} & & \frac{8}{16} & \frac{10}{16} & \frac{12}{16} \\
 & \frac{15}{16} & \frac{13}{16} & & \frac{11}{16} & \frac{9}{16} & \\
 & & \frac{16}{16} & & & & 1
 \end{array}
 \quad \text{bzw.} \quad
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & \\
 \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\
 & \frac{15}{16} & \frac{13}{16} & & \frac{11}{16} & \frac{9}{16} & \\
 & & & & & & 1
 \end{array}$$

9.1e: Notieren Sie bitte alle Ereignisse der σ -**Algebra** $\mathcal{A}$ über unserer Ergebnismenge Ω , die mit $\{1\}$ und $\{2\}$ genau nur zwei einelementige Ereignisse enthält.

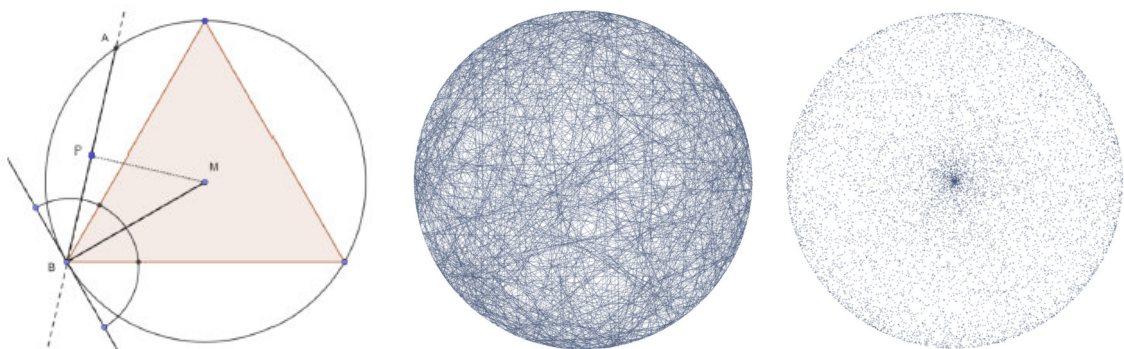
Lösung:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{ccc} \emptyset & & \\ \{1\} & \{3,4\} & \{2\} \\ \{2,3,4\} & \{1,2\} & \{1,3,4\} \\ \Omega & & \end{array} \right\}$$

Beachten Sie, dass sich aus den Ereignissen von $\mathcal{A}$ bezüglich der Operationen Vereinigen, Schneiden und Komplementärmengenbildung keine neuen Mengen erzeugen lassen. $\mathcal{A}$ ist also bezüglich dieser Operationen abgeschlossen.

Nun zur **Aufgabe mit den seltsamen Lösungen**. Dort muss noch die **Frage** "Wie ist es möglich, dass wir hier ungleiche Lösungen gefunden haben?" beantwortet werden. In der mathematischen Literatur ist dieses Phänomen unter dem Namen **bertrandsches Paradoxon** bekannt. Alle drei Lösungen sind richtig und widersprechen sich nur scheinbar. Denn jede der drei Lösungen fordert ein anderes Zufallsexperiment. Mit einem Zufallsgenerator kann man experimentell die Sehnen entsprechend den oben beschriebenen Lösungsverfahren erzeugen und graphisch darstellen. Die folgenden Bilder in einer Zeile zeigen mittig die erzeugten Sehnen und rechts die zugehörigen Mittelpunkte dieser Sehnen.

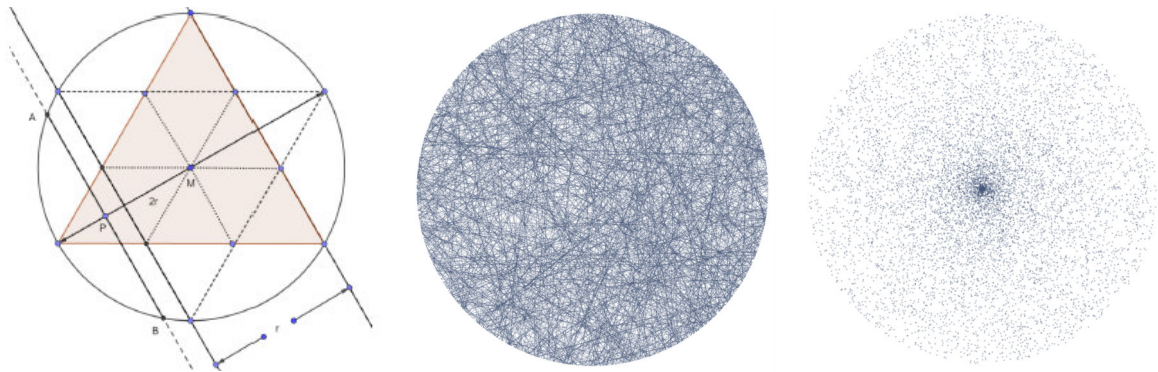
Bilder zum Lösungsweg 1:



Das rechte Bild legt nahe, dass die Wahrscheinlichkeit für die Positionierung eines Sehnenmittelpunktes zum Kreiszentrum und zum Kreisrand hin größer ist als in der Kreisfläche. Damit sind Wahrscheinlichkeiten über die Punkte der Kreisfläche hin ungleich verteilt. Anders als bei den Laplace-Wahrscheinlichkeiten ist hier keine

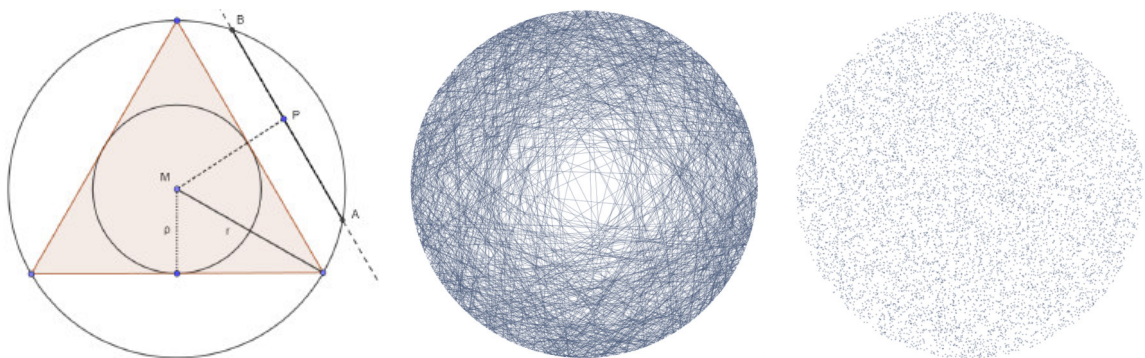
Gleichverteilung gegeben. Die Verteilung der Sehnen im mittleren Bild lässt wohl zunächst eine Gleichverteilung vermuten, aber wenn Sie dieses Bild mit dem entsprechenden Bild zum Lösungsweg 2 vergleichen, dann sollten doch Zweifel aufkommen.

Bilder zum Lösungsweg 2:



Das rechte Bild legt nahe, dass die Wahrscheinlichkeit für die Positionierung eines Sehnenmittelpunktes nur zum Kreiszentrum hin wächst und zum Kreisrand hin abnimmt. Die Sehnen hingegen scheinen gleichverteilt zu sein.

Bilder zum Lösungsweg 3:



Hier sind die Sehnenmittelpunkte offensichtlich gleichverteilt, die Sehnen aber erkennbar nicht. Es ist in der Stochastik besonders wichtig, auf eine sehr präzise Aufgabenformulierung zu achten. In den Schulbüchern finden sich aber immer wieder Aufgaben, die nicht ausreichend klar ausformuliert wurden und so den Schülern und Lehrern Schwierigkeiten bereiten.

Einige Bemerkungen zum pascalschen Dreieck und den Binomialkoeffizienten

Den Schülern begegnet das pascalsche Dreieck wohl erstmals in der Mittelstufe beim Ausmultiplizieren von Potenzen der Form $(a + b)^n$. In der Oberstufe ist es aber dann erforderlich, die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ nicht rekursive, sondern direkt zu berechnen. Ein Berechnungsverfahren ähnlich dem, wie es unten in der Zeile (10.2) angeführt ist, wird sicher immer vorgestellt, aber der Zusammenhang mit dem pascalschen Dreieck wird häufig unterschlagen. Dabei ist es sehr leicht, diesen Zusammenhang aufzuzeigen. Zugleich wird den Schülern beispielhaft ein Weg der

mathematischen Erkenntnisgewinnung demonstriert.

Das pascalsche Dreieck erzeugt man durch Notieren von Einsen auf den Schenkeln. Den Raum zwischen den Schenkeln füllt man durch die Addition zweier in einer Zeile benachbarter Zahlen. Dazu wird die gewonnene Summe dieser beiden Zahlen eine Zeile tiefer unterhalb des Zwischenraumes der zwei Summanden notiert.

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
	1	5		10		10	5		1
	1	6	15		20		15	6	1
1	7	21	35		35	21	7		1

Die dort rekursiv erzeugten Zahlen nennt man Binomialkoeffizienten, weil ein Binom wie $a + b$ potenziert genau die Zahlen einer Zeile des Dreiecks als Koeffizienten von Produkten von Potenzen von a und b liefert. Zum Beispiel ist

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4.$$

Diese Binomialkoeffizienten lassen sich aber auch direkt bestimmen. Dazu muss man sie präzise benennen können. Jeder Binomialkoeffizient bekommt einen Vornamen und einen Nachnamen. Der Vorname benennt die Zeile und der Nachname die Position innerhalb einer Zeile. Die Nummerierungen beginnen dabei stets mit Null. Zum Beispiel ist

$$\binom{5}{0} = \left(\begin{array}{l} \text{5-te Zeile} \\ \text{0-te Position} \end{array} \right) = 1 \quad \text{und} \quad \binom{4}{3} = \left(\begin{array}{l} \text{4-te Zeile} \\ \text{3-te Position} \end{array} \right) = 4$$

Hier nun das angedeutete pascalsche Dreieck in der beschriebenen Notation.

					$\binom{0}{0}$				
				$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$			
			$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$		
		$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$	
	$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$
$\binom{5}{0}$		$\binom{5}{1}$		$\binom{5}{2}$		$\binom{5}{3}$		$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$
$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$		$\binom{6}{2}$		$\binom{6}{3}$		$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

Die zwei folgenden Definitionen helfen es die Binomialkoeffizienten direkt zu berechnen.

Definition Sei n eine nichtnegative ganze Zahl, dann heißt $n!$ **n -Fakultät** genau dann, wenn gilt

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n & \text{wenn } n > 0 \end{cases}$$

Definition Seien n und k nichtnegative ganze Zahlen mit $k \leq n$, dann heißt $\binom{n}{k}$ **Binomialkoeffizient von n ber k** genau dann, wenn gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (10.2)$$

Folgerungen: Die Elemente des linken Schenkels haben stets die Gestalt $\binom{n}{0}$ und die des rechten Schenkels $\binom{n}{n}$. Sie liefern nur Einsen, denn

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Die Summe zweier in einer Zeile benachbarter Zahlen $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{k+1}$ ist $\binom{n+1}{k+1}$ und steht damit eine Zeile tiefer unter ihnen, denn es gilt

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \frac{n! \cdot (k+1)}{k!(k+1) \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)!(n-(k+1))! \cdot (n-k)} \\ &= \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n! \cdot (1+n)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Herleitung ist eine gute und oft auch notwendige Erinnerungsbung zum Addieren von Brüchen.

Aufgabe 10.1: Zeigen Sie bitte für $n \geq 1$ mithilfe der vollständigen Induktion, dass $\binom{n}{k}$ gleich der Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge ist.

Zum Zusammenhang von pascalschem Dreieck und der Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge (F_n) wird gewöhnlich rekursiv definiert vermöge

$$F_1 = 1, F_2 = 1 \quad \text{und} \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

Damit lassen sich alle weiteren Folgenglieder errechnen. Hier die ersten zehn Fibonaccizahlen:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55, \dots$$

Es ist sicher sehr aufwendig so die Zahl $F(259) = 600\,224\,643\,828\,207\,248\,620\,196\,670$

234 592 075 321 836 561 403 380 3411 zu bestimmen. Aber mithilfe des pascalschen Dreiecks gelingt es eine explizite Darstellung der Fibonaccizahlen finden. So liegen in der folgenden Darstellung des pascalschen Dreiecks die dort fett gedruckten Zahlen **1,4,3** und **1,7,15,10,1** auf zwei parallelen Geraden, die das Dreieck von links unten nach rechts oben durchqueren.

					1																				
					1		1																		
					1		2		1																
					1		3		3		1														
					1		4		6		4		1												
					1		5		10		10		5		1										
					1		6		15		20		15		6		1								
					1		7		21		35		35		21		7		1						
					1		8		28		56		70		56		28		8		1				
					1		9		36		84		126		126		84		36		9		1		
					1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1

Addiert ergeben die auf einer solchen Geraden liegenden Zahlen stets eine Fibonaccizahl F_n . So ist $1 + 4 + 3 = 8 = F_6$ und $1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34 = F_9$.

Aufgabe 10.2: Da die Zahlen im pascalschen Dreieck Binomialkoeffizienten sind, kann man jede Fibonaccizahl als Summe geeigneter Binomialkoeffizienten darstellen. Finden Sie bitte eine solche Summenformel für F_n .

Aufgabe 10.3: Eine andere bemerkenswerte Folge (S_n) erhält man, wenn man mit S_n die Anzahl der ungeraden Zahlen auf einer solchen Geraden bezeichnet. So ist $S_6 = S(1, 4, 3) = 2$ und $S_9 = S(1, 7, 15, 10, 1) = 4$. Bestimmen Sie bitte die ersten zehn Folgenglieder und versuchen Sie auch für S_n eine explizite Darstellung zu gewinnen.

Bemerkungen:

Wenigstens zwei Lösungswege bezüglich des bertrandschen Paradoxons sollten Sie kennen.

Der Nachweis, dass die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ die Zahlen des pascalschen Dreiecks liefern, sollte Ihnen stets gelingen.

Auch der Zusammenhang von Binomialkoeffizienten und Fibonaccizahlen sollte Ihnen klar sein.