

## Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

Text 11 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

**Aufgabe 10.1:** Zeigen Sie bitte für  $n \geq 1$  mithilfe der vollständigen Induktion, dass  $\binom{n}{k}$  gleich der Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge ist.

**Lösung:** Eine  $n$ -elementige Menge kann man in der Gestalt  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  darstellen. Für die folgenden Überlegungen ist es ausreichend und weniger schreibaufwendig, wenn wir das Elementsymbol  $a_n$  durch den Index  $n$  ersetzen. Wir schreiben also hier  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  anstelle von  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ . Schauen wir zunächst, was geschieht, wenn wir einer gegebenen Menge ein weiteres Element hinzufügen. Sei  $M_3 = \{1, 2, 3\}$  gegeben. Die Potenzmenge von  $M_3$  ist dann

$$\mathcal{P}_{(M_3)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \{\} & & \\ \{1\} & \{2\} & \{3\} \\ \{2,3\} & \{1,3\} & \{1,2\} \\ & \{1,2,3\} & \end{array} \right\}$$

und  $M_3$  hat

$$\left\{ \begin{array}{ll} \binom{3}{0} = 1 & \text{nullelementige Teilmenge} \\ \binom{3}{1} = 3 & \text{einelementige Teilmengen} \\ \binom{3}{2} = 3 & \text{zweielementige Teilmengen} \\ \binom{3}{3} = 1 & \text{dreielementige Teilmenge} \end{array} \right.$$

Fügen wir nun mit 4 ein weiteres Element zu  $M_3$  hinzu, dann kann man die Potenzmenge von  $M_4 = \{1, 2, 3, 4\}$  wie folgt darstellen.

$$\mathcal{P}_{(M_4)} = \left\{ \begin{array}{cccccc} \{\} & & & & & \\ \{1\} & \{2\} & \{3\} & & \{4\} & \\ \{1,2\} & \{1,3\} & \{2,3\} & \{1,4\} & \{2,4\} & \{3,4\} \\ & \{1,2,3\} & & \{1,2,4\} & \{1,3,4\} & \{2,3,4\} \\ & & & & \{1,2,3,4\} & \end{array} \right\}$$

und es gilt

$$M_4 \text{ hat } \left\{ \begin{array}{llll} \binom{3}{0} & = 1 & = 1 & = \binom{4}{0} & \text{nullelementige Teilmenge} \\ \binom{3}{1} + \binom{3}{0} & = 3 + 1 & = 4 & = \binom{4}{1} & \text{einelementige Teilmengen} \\ \binom{3}{2} + \binom{3}{1} & = 3 + 3 & = 6 & = \binom{4}{2} & \text{zweielementige Teilmengen} \\ \binom{3}{3} + \binom{3}{2} & = 1 + 3 & = 4 & = \binom{4}{3} & \text{dreielementige Teilmengen} \\ & \binom{3}{3} & = 1 & = 1 & = \binom{4}{4} & \text{vierelementige Teilmenge} \end{array} \right.$$

Nun zum Induktionsbeweis.

**Induktionsanfang:** Die Menge  $M_1 = \{1\}$  besitzt mit der leeren Menge  $\binom{1}{0}$  nullelementige Teilmengen und mit  $\{1\}$  genau  $\binom{1}{1}$  einelementige Teilmengen.

**Induktionsschritt von  $n$  auf  $n+1$ :** Die Menge  $M_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  besitzt nach Induktionsannahme  $\binom{n}{k+1}$  Teilmengen  $T_{k+1}$  mit  $(k+1)$  Elementen und  $\binom{n}{k}$  Teilmengen  $T_k$  mit  $k$  Elementen. Vergrößern wir  $M_n$  durch Hinzufügen des neuen Elementes  $n+1$  zu  $M_{n+1} = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$ , dann ist jede der  $\binom{n}{k+1}$  Teilmengen  $T_{k+1}$  auch eine

$(k + 1)$ -elementige Teilmenge von  $M_{n+1}$ . Jede der  $\binom{n}{k}$  Teilmengen  $T_k$  wird nun auch durch Hinzufügen des Elementes  $n + 1$  zu einer  $(k + 1)$ -elementigen Teilmenge von  $M_{n+1}$ . Also besitzt  $M_{n+1}$  genau

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad (11.1)$$

Teilmengen mit  $k + 1$  Elementen. Die Gleichung (11.1) hatten wir im Text 10 im Zusammenhang dem pascalschen Dreieck hergeleitet.■

**Aufgabe 10.2:** Da die Zahlen im pascalschen Dreieck Binomialkoeffizienten sind, kann man jede Fibonaccizahl als Summe geeigneter Binomialkoeffizienten darstellen. Finden Sie bitte eine solche Summenformel für  $F_n$ .

**Lösung:** Mit  $F_9 = 1 + 7 + 15 + 10 + 1 = \binom{8}{0} + \binom{7}{1} + \binom{6}{2} + \binom{5}{3} + \binom{4}{4} = 34$  errahmt man die Summenformel zu

$$F_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-k}{k-1}.$$

Man beachte bei der Summation, dass die Binomialkoeffizienten  $\binom{a}{b}$  gleich Null sind, wenn die Zahl  $b$  über  $a$  hinauswächst.. Es gilt dann

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \quad \text{und} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

denn

$$\begin{aligned} & F_{n+1} + F_n \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k-1} + \sum_{k=1}^n \binom{n-k}{k-1} \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots + \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \dots \\ &= \binom{n}{0} + \left( \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0} \right) + \left( \binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{1} \right) + \left( \binom{n-3}{3} + \binom{n-3}{2} \right) + \dots \\ & \quad \text{und weiter mit Zeile (11.1)} \end{aligned}$$

$$= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{n+2} \binom{n-k}{k-1} = F_{n+2}$$

**Aufgabe 10.3:** Eine andere bemerkenswerte Folge ( $S_n$ ) erhält man, wenn man mit  $S_n$  die Anzahl der ungeraden Zahlen auf einer solchen Geraden bezeichnet. So ist  $S_6 = S(1, 4, 3) = 2$  und  $S_9 = S(1, 7, 15, 10, 1) = 4$ . Bestimmen Sie bitte die ersten zehn Folgenglieder und versuchen Sie auch für  $S_n$  eine explizite Darstellung zu gewinnen.

**Lösung:** Wenn  $\binom{n-k}{k-1}$  eine gerade Zahl ist, ist  $\binom{n-k}{k-1} \bmod 2 = 0$ . Ist  $\binom{n-k}{k-1}$  ungerade, dann gilt  $\binom{n-k}{k-1} \bmod 2 = 1$ . Damit folgt

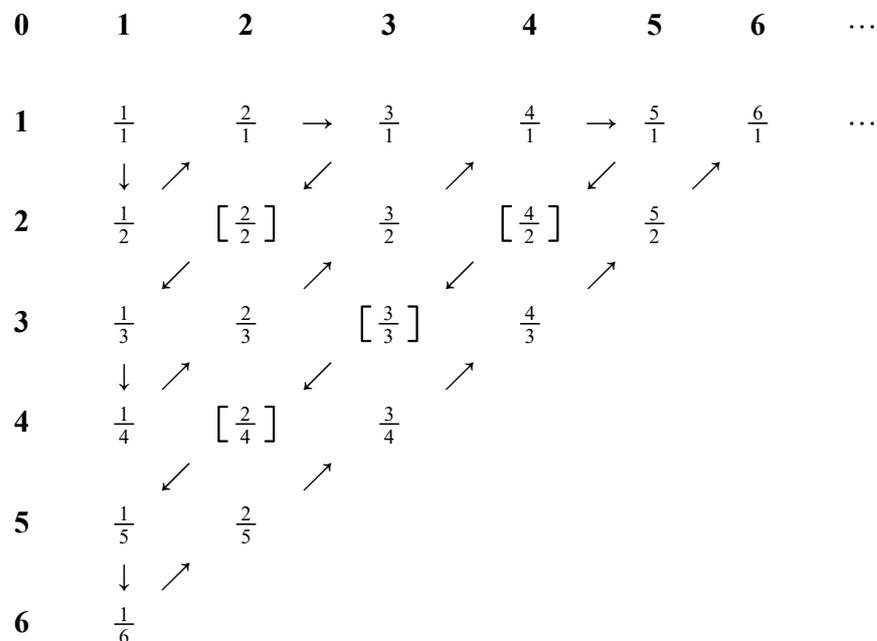
$$S_n = \sum_{k=1}^n \left( \binom{n-k}{k-1} \bmod 2 \right)$$

und

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1, \quad S_3 = 2, \quad S_4 = 1, \quad S_5 = 3, \quad S_6 = 2, \quad S_7 = 3, \quad S_8 = 1, \quad S_9 = 4, \quad S_{10} = 3, \quad S_{11} = 5, \quad \dots$$

Die etwas chaotisch wirkende Folge ( $S_n$ ) wird in der Literatur als *diatomische Folge von Stern und Brocot* oder kurz als *Stern-Brocot-Folge* bezeichnet. Sie steht in einem

bemerkenswerten Zusammenhang mit dem *Ersten-Cantorschen-Diagonalverfahren* zum Beweis der Gleichmächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der positiven rationalen Zahlen. Wandert man nämlich in dem hier vorgestellten Schema von dem links oben befindlichen Bruch  $\frac{1}{1}$  den Pfeilen folgend über  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{2}{1}$  stets weiter, so wird man jede vorgegebene positive rationale Zahl erreichen. Diese Wegführung ist eine Variation des in Text 08 vorgestellten Weges.



Bei dieser Wanderung sollen allerdings bereits erreichte Zahlen übersprungen werden. Die zu überspringenden Zahlen sind hier eingeklammert zu sehen. So kann man jedem dieser Brüche genau eine und nur eine natürliche Zahl zuordnen. Dies sei hier angedeutet:

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	...
1	2	3	4	5	6	7	8	...

Es wird mit dem cantorschen Verfahren sehr mühselig sein für ein großes  $n$  den zugehörigen Bruch zu bestimmen. Bildet man jedoch den Quotienten

$$Q_n := \frac{S_n}{S_{n+1}}$$

zweier benachbarter Folgenglieder der Stern-Brocot-Folge so liefert  $Q_n$  die nachstehenden Brüche:

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	...
1	2	3	4	5	6	7	8	...

und man kann z. B. leicht feststellen, dass  $Q(676) = \frac{29}{79}$  gilt. Die nächste Tabelle gestattet weitere Einsichten in die Struktur der Folge  $(Q_n)$ . Man beachte, dass die Anzahl der Folgenglieder pro Zeile eine Zweierpotenz ist.

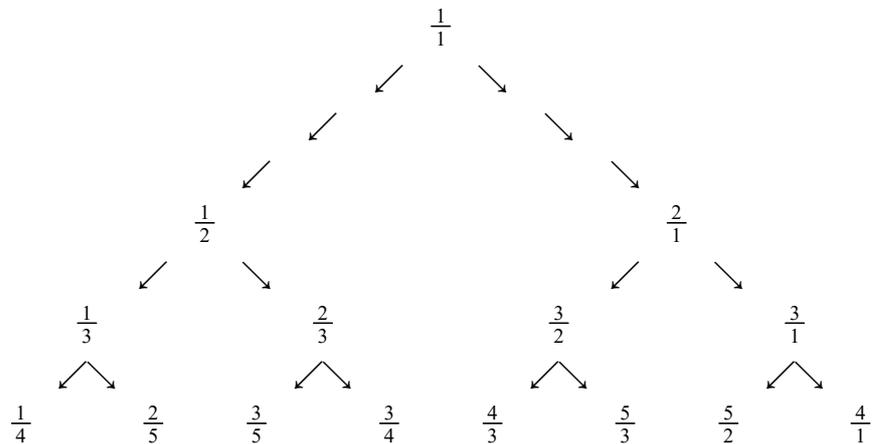
$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{6}$$

$$\frac{3}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{5}{11} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{5}{13} \quad \frac{3}{14}$$

$$\frac{4}{15} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{5}{17} \quad \frac{4}{18} \quad \frac{7}{19} \quad \frac{3}{20} \quad \frac{8}{21} \quad \frac{5}{22} \quad \frac{7}{23} \quad \frac{2}{24} \quad \frac{7}{25} \quad \frac{5}{26} \quad \frac{8}{27} \quad \frac{3}{28} \quad \frac{7}{29} \quad \frac{4}{30}$$

Aus der obigen Anordnung gewinnt man den Stern-Brocot-Baum:



Fallen die oben notierten Brüche senkrecht in die Zwischenräume der untersten Zeile so ergibt sich die folgende Anordnung

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad 1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1}$$

Die zugehörige Dezimalzahldarstellung ist

$$0.25 \quad 0.\bar{3} \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0.\bar{6} \quad 0.75 \quad 1 \quad 1.\bar{3} \quad 1.5 \quad 1.\bar{6} \quad 2 \quad 2.5 \quad 3 \quad 4$$

und zeigt, dass die Brüche entsprechend der Relation  $<$  angeordnet sind. Führt man für die so angeordneten Brüche die folgende Addition  $\oplus$  ein mit

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{\alpha}{\beta} := \frac{a+\alpha}{b+\beta}, \quad (11.2)$$

so liefert diese Addition zweier Brüche, die einen gemeinsamen Nachbarn haben, just diesen gemeinsamen Nachbarn. Dazu ein Beispiel

$$\frac{4}{3} \oplus \frac{5}{3} = \frac{4+5}{3+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

### Eine Bemerkung zur fraktalen Geometrie

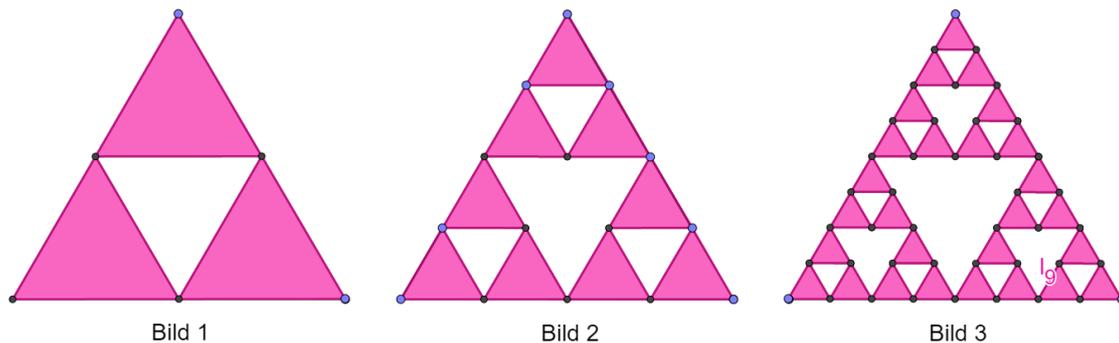
Ersetzt man im pascalschen Dreieck die Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  durch



die Skalierung  $s = 2$  gewählt. Zeichnet man die Verbindungsstrecken der Halbierungspunkte hinzu, so wird das Dreieck in vier zum Ausgangsdreieck ähnliche Dreiecke zerlegt. Die Anzahl der erhaltenen Teildreiecke ist dann  $A = 4$ . Definiert man die *Dimension*  $D$  einer geometrischen Figur vermöge

$$s^D = A,$$

so gilt hier für das vorgegebene Dreieck  $D = 2$ , da  $2^2 = 4$ . Für das Sierpinski-Dreieck denkt man sich jedoch das innere Dreieck entfernt. Bei den drei verbliebenen Teildreiecken verfährt man ebenso.

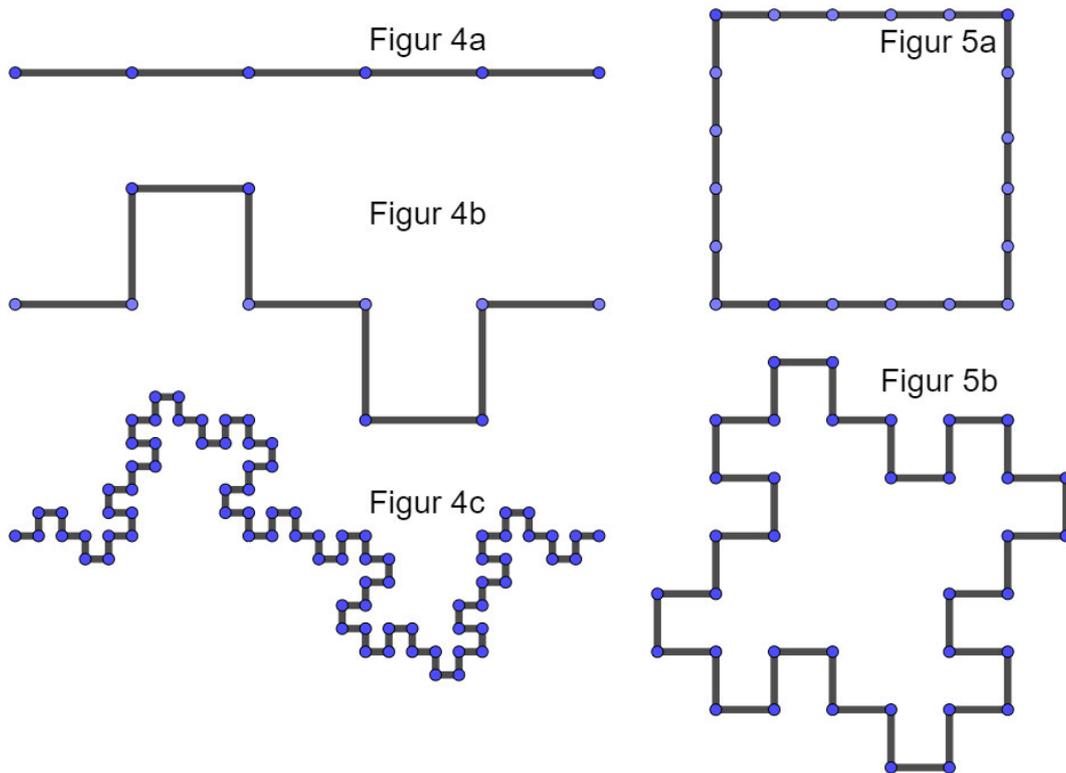


Dieses Verfahren soll nicht abbrechend fortgesetzt werden. Die so nur noch gedanklich zu erfassende, aber zeichnerisch nicht darzustellende Struktur ist das Sierpinski-Dreieck. Hier ist mit  $2^D = 3$  die Dimension gleich  $D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58496$ . Diese Dimension ist irrational und zugleich ein Bruch (Fraktur, lateinisch: fractura) mit Logarithmen im Zähler und Nenner. Objekte der fraktalen Geometrie haben also stets eine gebrochene Dimension. Ist der Flächeninhalt des vorgegebenen Dreiecks gleich 1, dann hat die erste Annäherung des Sierpinski-Dreiecks (Bild 1) den Flächeninhalt  $F_1 = \frac{3}{4}$ . Für die folgenden Näherungen gilt  $F_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$  (Bild 2) und  $F_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$  (Bild 2). Das Sierpinski-Dreieck hat damit den bemerkenswerten Flächeninhalt  $F_S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ .

Hier wird ein weiteres einfach gebautes Fraktal vorgestellt. Die Strecke der Figur 4a habe die Länge 1 und sei durch die Skalierung  $s = 5$  in fünf gleichgroße Teilstrecken zerlegt. Nun soll die zweite Teilstrecke so nach oben und die vierte so nach unten verschoben werden, dass die 9 Teilstrecken der Figur 4b stets gleichlang sind und paarweise einen rechten Winkel bilden. Wenn man nun mit jeder Teilstrecke von 4b ebenso verfährt, dann entsteht die Figur 4c, die aus 81 Teilstrecken zusammengesetzt ist. Nun sollen diese Teilstrecken wiederum in der beschriebenen Weise verändert werden und unbegrenzt deren Teile wieder und wieder. Dem so erzeugbaren Fraktal habe ich den seltsamen Namen ALAA LALLA (kurz: AL) gegeben. Der Name beinhaltet die Konstruktionsvorschrift mit der Zuordnung A für rechts und L für links. Nähert man sich von unten dem linken Punkt in der Figur 4b, dann muss man zunächst nach rechts gehen und dann nach links und entsprechend weiter. A wurde anstelle R gewählt, weil RLRR RLRLRL schwerer zu sprechen ist. Die Weglänge der Figur 4b beträgt  $l_1 = \frac{9}{5}$ , die von Figur 4c ist  $l_2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{81}{25}$  und die von ALAA LALLA ist dann

$$l_{AL} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{5}\right)^n = \infty$$

ALAA LALLA hat wegen  $5^D = 9$  die Dimension  $D = \frac{\ln 9}{\ln 5} \approx 1.365212$



Die Figur 5a zeigt ein Quadrat, dessen Seitenlänge 1 sein soll. Ersetzt man jede der vier Seiten mit der passenden Figur 4b, dann erhält man die Figur 5b. Der Flächeninhalt der Figur 5b ist ungeachtet der Verformungen gleich 1. Selbst wenn die Quadratseiten jeweils durch ALAA LALLA ersetzt werden, ändert sich der Flächeninhalt nicht. So verwandelt sich das Quadrat in eine geometrische Figur mit unendlich großem Umfang und einem endlichen Flächeninhalt. Die große Bedeutung und Anwendung der fraktalen Geometrie in Technik und Wissenschaften wurde von der *Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte* [16] bereits 1988 aufgezeigt.

**Aufgabe 11.1:** Versuchen Sie bitte die Addition in Zeile (11.2) geometrisch zu deuten.

**Aufgabe 11.2:**

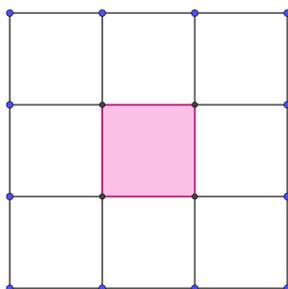


Bild 1

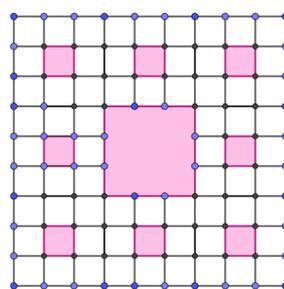


Bild 2

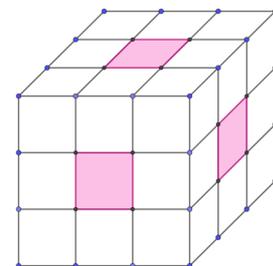


Bild 3

**Aufgabe 11.2a:** Das Bild 1 zeigt ein in neun kongruente Teilquadrate zerlegtes Quadrat. Entfernt man das mittlere Teilquadrat und verfährt man mit den verbliebenen

Teilquadraten in gleicher Weise, so ergibt sich das Bild 2. Setzt man dieses Verfahren ad infinitum fort, so entsteht ein Fraktal. Bestimmen Sie bitte die Dimension und den Flächeninhalt dieses Fraktals.

**Aufgabe 11.2b:** Bild 3 soll einen in 27 kongruente Teilwürfel zerlegten Würfel zeigen. Entfernt man bei jeder der 6 Seitenflächen den mittleren Teilwürfel und auch den Teilwürfel im Zentrum des ursprünglich gegebenen Würfels, dann bleiben 20 Teilwürfel übrig. Verfährt man mit den verbliebenen Teilwürfeln in gleicher Weise und setzt man dieses Verfahren ad infinitum fort, so entsteht ein weiteres Fraktal. Bestimmen Sie bitte die Dimension und den Rauminhalt dieses Fraktals.

**Bemerkungen:** Die Lösungsidee von Aufgabe 10.1 sollten Sie erläutern können. Den vorgestellten Zusammenhang von dem pascalschen Dreieck, den Fibonaccizahlen, der Stern-Brocot-Folge und dem Ersten-Cantorschen-Diagonalverfahren sollte Ihnen klar sein. Schreibaufwendige Herleitungen wie bei  $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$  sind nicht gefordert. Für einfache Fraktale sollten Sie die Dimension bestimmen können.

**Literatur:**

[14] Stern, Moritz Abraham, Über eine zahlentheoretische Funktion, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 55, 1858. S. 193-220.

[15] Delahaye, Jean-Paul, Die verkannte Schwester der Fibonacci-Folge, Spektrum der Wissenschaft 05/2015, S. 64-69

[16] Mandelbrot, Benoit B., Die fraktale Geometrie der Natur, Basel, Birkhäuser Verlag 1987

[16] Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, 115. Versammlung, Freiburg i. Br. 1988: Ordnung und Chaos in der unbelebten und belebten Natur, Stuttgart, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft 1989