Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

Text 13 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

Aufgabe 12.1: Professor Nils Niesdüwel hielt trotz eines starken Schnupfens aber Coronavirenfrei seine Vorlesung zum Thema 'Gravitation'. Als er einmal kurz aus dem geöffneten Fenster des hochgelegenen Hörsaales schaute, fiel ein Tropfen von seiner Nasenspitze in die Tiefe. Dies veranlasste ihn die folgenden Aufträge seinen Hörern zuzuteilen.

12.1a: Meine Nasenspitze befand sich beim Ablösen des Tropfens $16.6m$ über dem Campusgelände und $4.9m$ über der Fensterbank des Arbeitszimmers von Dr. Valentius Krtschbggmert. Setzen Sie bitte die hiesige Fallbeschleunigung von $9.8\frac{m}{s^2}$ in die Weg-Zeit-Funktion für den freien Fall

$$l(t) = \frac{1}{2}g \cdot t^2$$

ein und bestimmen Sie die Fallzeiten des Tropfens bis zur Höhe der Fensterbank und endlich bis zum Boden des Campusgeländes. Der Luftwiderstand soll hierbei keine Beachtung finden.

Mit

$$l(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{98}{100}\frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

folgt

$$\frac{49}{100}m = \frac{1}{2} \cdot \frac{98}{100}\frac{m}{s^2} \cdot t_{Fenster}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{Fenster} = 1s$$

$$\frac{166}{100}m = \frac{1}{2} \cdot \frac{98}{100}\frac{m}{s^2} \cdot t_{Boden}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{Boden} = \frac{1}{7}\sqrt{166}\,s \approx 1.840\,585\,5s$$

12.1b: Bestimmen Sie dann die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ des Tropfens von der Nase bis zum Boden in $\frac{m}{s}$ und in $\frac{km}{h}$.

Lösung

$$\bar{v} = \frac{l}{t} = \frac{16.6m}{\frac{1}{7}\sqrt{166}\,s} \approx 9.018\,869\,1\frac{m}{s} \approx 32.47\frac{km}{h}$$

12.1c: Bestimmen Sie auch die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ des Tropfens zwischen der Fensterbank und dem Boden.

Lösung

$$\bar{v} = \frac{l}{t} = \frac{16.6m - 4.9m}{\frac{1}{7}\sqrt{166}\,s - 1s} \approx 13.918\,869\,10\frac{m}{s} \approx 50.11\frac{km}{h}$$

12.1d: Wenn der Tropfen die Fensterbank passiert hat und noch eine halbe Sekunde fällt, welche Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}_1$ erreicht dann der Tropfen auf der Reststrecke unterhalb der Fensterbank?

Lösung

$$\bar{v}_1 = \frac{l}{t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9.8\left(1 + \frac{1}{2^1}\right)^2 m - 4.9m}{\frac{1}{2^1} s} = 12.25 \frac{m}{s} = 44.1 \frac{km}{h}$$

12.1e: Sei $k \in \mathbb{N}$. Wenn der Tropfen die Fensterbank passiert hat und noch $\frac{1}{2^k}$ Sekunde fällt, welche Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}_k$ erreicht dann der Tropfen auf der Reststrecke unterhalb der Fensterbank? Bestimmen Sie $\bar{v}_k$ in Abhängigkeit von k.

Lösung

$$\bar{v}_k = \frac{l}{t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9.8\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)^2 m - 4.9m}{\frac{1}{2^k} s} = \frac{4.9\left(\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)^2 - 1\right)}{\frac{1}{2^k}} \frac{m}{s}$$

$$= 4.9\left(1 + \frac{2}{2^k} + \frac{1}{2^{2k}} - 1\right)2^k \frac{m}{s} = 4.9 \cdot \left(2 + \frac{1}{2^k}\right)\frac{m}{s}$$

12.1f: Versuchen Sie nun die Momentangeschwindigkeit des Tropfens in Höhe der Fensterbank von Dr. V. K. näherungsweise in $\frac{m}{s}$ und in $\frac{km}{h}$ zu bestimmen.

Lösung

$$V = \lim_{k \to \infty} \bar{v}_k = \lim_{k \to \infty} 4.9 \cdot \left(2 + \frac{1}{2^k}\right)\frac{m}{s} = 9.8 \frac{m}{s} = 35.28 \frac{m}{s}$$

Leibniz hatte einen gänzlich anderen Zugang gewählt. Mein ehemaliger Hochschullehrer Prof. Dr. Hans-Heinrich Körle beschreibt diesen Weg in seinem Buch *'Die phantastische Geschichte der Analysis'*. Der Universalgelehrte Leibniz, studierter Philosoph und Jurist, hatte sich wohl eher spielerisch mit Zahlenfolgen und Reihen beschäftigt. Dazu sei hier aus dem Kapitel II.R, Seite 157, unter der Überschrift *"Leibniz' Spielerei mit Folgen"* ein Absatz sinngemäß wiedergegeben:

"Sein erstes Spielzeug waren die Zahlenfolgen. Die Differenzen aufeinander folgender Quadratzahlen, die Differenzen dieser Differenzen et cetera - die iterierten Differenzen der Quadratzahlen, bilden das folgende Schema

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & \cdots \\
& 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & \cdots \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \cdots \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots
\end{array}$$

Hat sich das "Differenzieren" dann schließlich verfeinert, so findet das Schema sein Gegenstück in der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}x^2 = 0."$$

Aufgabe 12.2a: Geben Sie bitte eine vollständige Lösung der obigen Differentialgleichung an.

Lösung *Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}x^2 = \frac{d^3 y_{(x)}}{dx^3} = y'''_{(x)} = 0$$

gewinnt man in drei Schritten mit Konstantanten C_1, C_2 und C_3 vermöge

$$\begin{aligned} y'''_{(x)} &= 0 \quad \Rightarrow \quad y''_{(x)} = C_1 \\ y''_{(x)} &= C_1 \quad \Rightarrow \quad y'_{(x)} = C_1 x + C_2 \\ y'_{(x)} &= \frac{1}{2}C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y_{(x)} = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \end{aligned}$$

zu

$$y(x) = \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Mit $C_1 = 2$, $C_2 = 0$ und $C_3 = 0$ erhält man dann die spezielle Lösung $y(x) = x^2$.

Aufgabe 12.2b: Betrachten Sie in diesem Sinne auch die Folge der Kubikzahlen und notieren Sie die zugehörige Differentialgleichung.

Lösung *Aus*

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 & & \cdots & & & & & \\
 & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & 91 & & \cdots & & & & \\
 & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & 36 & & \cdots & & & \\
 & & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \cdots & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots &
\end{array}$$

gewinnen wir mit Leibniz die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}x^3 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad y''''_{(x)} = 0$$

Aufgabe 12.2c: Im Text 10 wurde die Fibonaccifolge $F(x)$ vorgestellt. *"Differenzieren"* Sie nun einmal die Fibonaccifolge gemäß dem obigen Schema und notieren Sie die zugehörige Differentialgleichung.

Lösung *Mit*

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 5 & & 8 & & 13 & & \cdots & \\
 & 0 & & 1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 5 & & 8 & & \cdots
\end{array}$$

folgt

$$\frac{d}{dx}F(x) = F(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{dF}{dx} = F$$

Aufgabe 12.2d: Lösen Sie bitte die gefundene Differentialgleichung und zeigen Sie, dass die Lösung $F(x)$ keineswegs die Folgenglieder der Fibonaccifolge liefert.

Lösung *Die Lösungsmethode der 'Separation der Variablen' für Differentialgleichungen besagt, dass man, wenn es denn überhaupt möglich ist, die*

Variablen durch das Gleichheitszeichen trennt. Hier folgt mit $\frac{dF}{dx} = F$ *die Gleichung* . $\frac{dF}{F} = dx$ *bzw.* $\frac{dF}{F} = 1dx$*. Integriert folgt mit Konstanten* K *und* C

$$\int \frac{dF}{F} = \int 1dx \quad \textit{und weiter} \quad \ln F = x + K$$

und weiter

$$e^{\ln F} = e^{x+K} \qquad \textit{bzw.} \qquad F = e^K e^x = Ce^x$$

Mit $F_{(1)} = 1 = Ce^1$ *folgt* $C = \frac{1}{e}$ *und damit* $F_{(2)} = \frac{1}{e} \cdot e^2 = e$ *im Wid. zu* $F_{(2)} = 1$

Aufgabe 12.2d: Woran mag es liegen, dass die Lösung $F(x)$ die Folgenglieder der Fibonaccifolge nicht liefert?

Lösung *Es liegt an der "Verfeinerung des Differenzierens". Die fordert, dass das Differenzieren auch für die Zahlen zwischen den ganzen Zahlen gelten muss. Hätte man z. B. das Intervall zwischen* 2 *und* 3 *geviertelt, dann ergibt sich im Falle der Quadratzahlen die nachstehende Tabelle.*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
2^2 & & \left(\frac{9}{4}\right)^2 & & \left(\frac{10}{4}\right)^2 & & \left(\frac{11}{4}\right)^2 & & 3^2 & & \cdots \\
& \frac{17}{16} & & \frac{19}{16} & & \frac{21}{16} & & \frac{23}{16} & & \frac{25}{16} & \cdots \\
& & \frac{1}{8} & & \frac{1}{8} & & \frac{1}{8} & & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \cdots \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}$$

Die Verfeinerung setzt also voraus, dass man eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *besitzt, die die Folgenglieder in der geforderten Reihenfolge liefert. Nun ist allerdings die zugehörige Funktion* $F(x)$ *etwas komplizierter gebaut als* x^2*.*

Die Formel von **Moivre-Binet**

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^z - (-1)^z\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-z}\right)$$

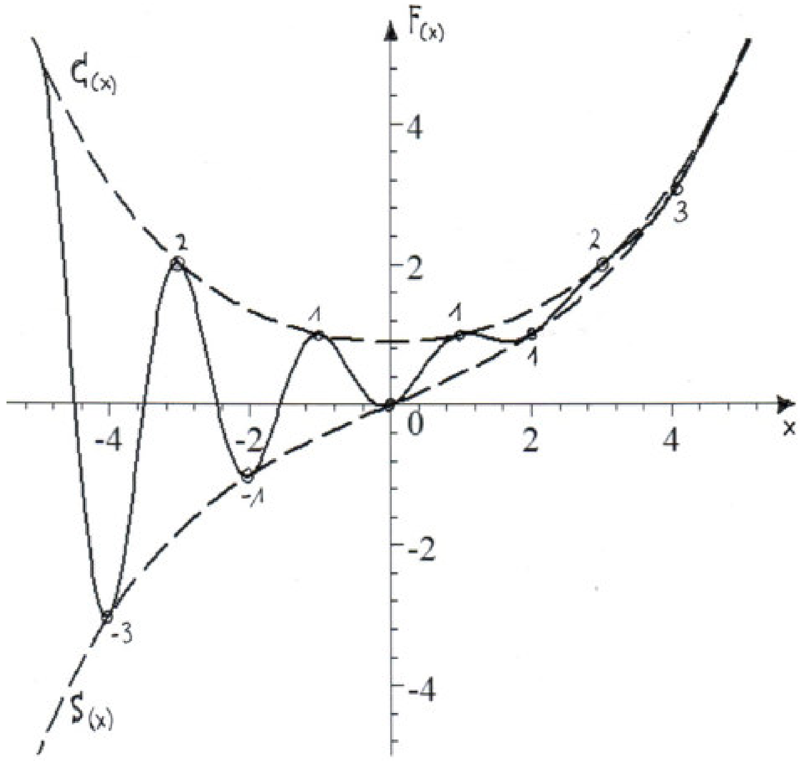
erlaubt es für beliebige ganze Zahlen z die Fibonaccizahlen zu berechnen. Dies ist aber wegen des Faktors $(-1)^z$ nicht für beliebige reelle Zahlen z möglich. So stellt die Formel von Moivre-Binet keine reelle Funktion über $\mathbb{R}$ dar. Unterscheiden wir jedoch zwischen ungeradzahligen und geradzahligen Argumenten z, dann haben wir mit

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}\right) \text{ und } S(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}\right)$$

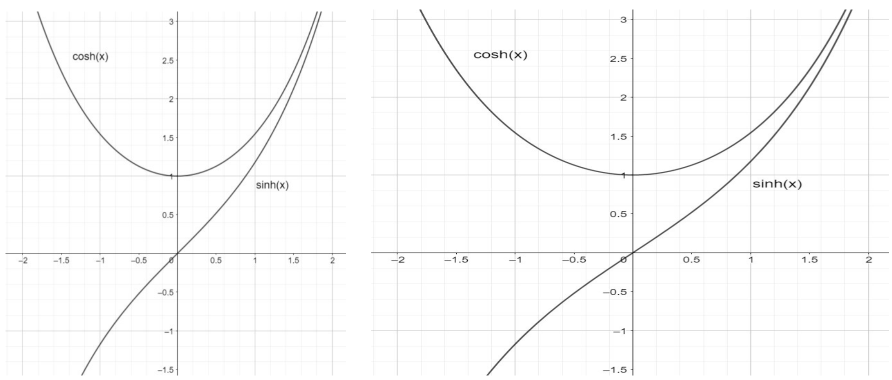
zwei differenzierbare Funktionen. $C(x)$ liefert für ungeradzahlige und $S(x)$ für geradzahlige Argumente x Fibonaccizahlen. Die Graphen von $C(x)$ und $S(x)$ sind in der nachstehenden Skizze gestrichelt zu sehen. Ersetzt man in der Formel von Moivre-Binet z durch x und $(-1)^x$ durch $\cos(\pi x)$, dann ist

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \cos(\pi x)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}\right)$$

eine differenzierbare Funktion, die für ganzzahlige Argumente x die Fibonaccifolge liefert. Der Funktionsgraph von F wandert so beständig zwischen den Graphen von C und S hin und her und liefert in den Berührungspunkten die Fibonaccizahlen. Dies zeigt die folgende Skizze hier.



Die folgenden zwei Bilder zeigen die Graphen der hyperbolischen Funktionen $\cosh(x)$ *(sprich: Sinus hyperbolicus)* und $\sinh(x)$ *(sprich: Kosinus hyperbolicus)* links bei gleicher und rechts bei ungleicher Achseneinteilung.



Das rechte Bild soll die offensichtlichen Gemeinsamkeiten mit der obigen Funktion F aufzeigen. Tatsächlich kann man mithilfe der hyperbolischen Funktionen und geeigneten konstanten die Funktion F darstellen. Die hyperbolischen Funktionen werden oftmals wenig anschaulich definiert vermöge

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ und } \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \qquad (1)$$

Ebenso hätte man die trigonometrischen Funktionen definieren können vermöge

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ mit } i^2 = -1. \qquad (2)$$

Aufgabe 13.1: Finden Sie ausgehend von den Definitionen in Zeile 1 möglichst einfache Darstellungen für die Terme

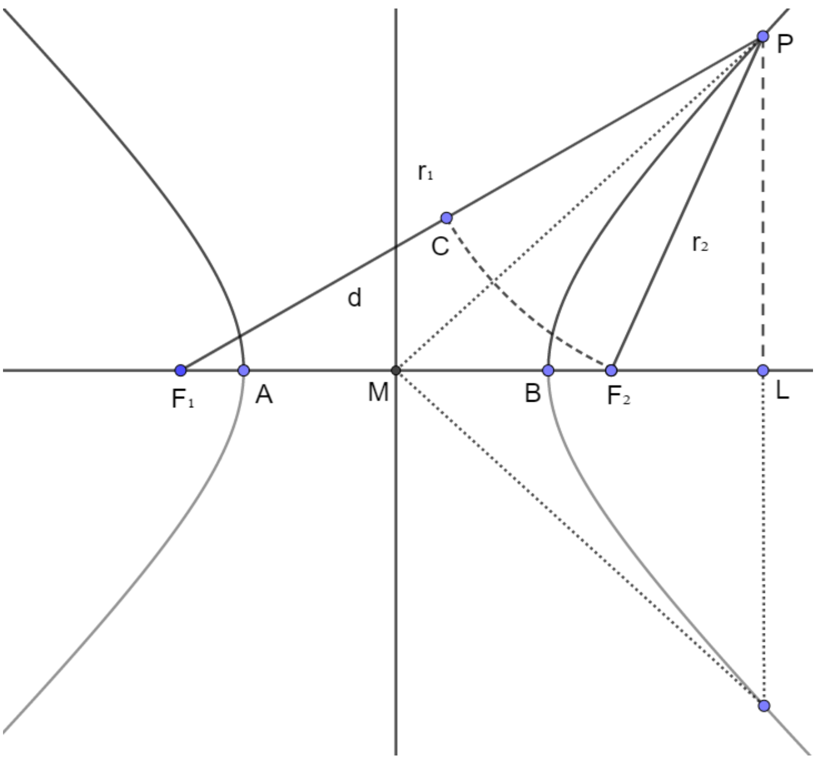
$$\cosh(x) + \sinh(x) \quad \text{und} \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$$
$$\text{sowie} \quad \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

Aufgabe 13.2: Finden Sie ausgehend von den Definitionen in Zeile 2 möglichst einfache Darstellungen für die Terme

$$\cos(x) + i\sin(x) \quad \text{und} \quad \cos^2(x) + \sin^2(x)$$
$$\text{sowie} \quad \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

Aber so, wie man die trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis den Schülern anschaulich macht, vermag man dies auch für die hyperbolischen Funktionen mithilfe der Einheitshyperbel. Die folgende Skizze zeigt die Einheitshyperbel als punktsymmetrischen Graphen zum Koordinatenursprung mit einem beliebig gewählten Punkt P auf dem rechten Hyperbelast. Mit $r_1 = |\overline{F_1P}|$ und $r_2 = |\overline{F_2P}|$ sind die Abstände eines Hyperbelpunktes P von den Brennpunkten F_1 und F_2 bezeichnet. Analog zur Gleichung des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$ lautet die Gleichung der Einheitshyperbel

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{3}$$



Aufgabe 13.3a: Zeigen Sie bitte, dass die Differenz $d = r_1 - r_2$ für alle Hyperbelpunkte $P(x,y)$ konstant ist und bestimmen Sie d. Die Brennpunkte der Einheitshyperbel sind hier mit $F_1\left(-\sqrt{2},0\right)$ und $F_1\left(\sqrt{2},0\right)$ gegeben.

Aufgabe 13.3b: Auf welche Weise kann man nun mithilfe der Einheitshyperbel den $\cosh(\psi)$ und $\sinh(\psi)$ veranschaulichen.

Aufgabe 13.3c: Die Gleichung (3) und der Satz von Pythagoras legen ein einfaches Verfahren nahe, um mit Zirkel und Lineal Punkte der Hyperbel zu konstruieren. Suchen Sie bitte nach einem geeigneten Konstruktionsverfahren.

Bemerkungen: Die Wege von Newton und Leibniz zur Differentialrechnung sollten Sie an den hier gegebenen Beispielen erläutern können. Die angegebenen Definitionen der hyperbolischen Funktionen sollten sie fortan wissen.

Literatur:

[17] Heuser, Harro, Lehrbuch der Analysis Teil 1, B. G. Teubner Stuttgart 1993.

[18] Körle, Hans-Heinrich, Die phantastische Geschichte der Analysis, Oldenburg Wissenschaftsverlag München 2009

[19] Bronstein-Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik 7. Auflage, Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1969

[20] Scheid, Harald, Elemente der Geometrie 3. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg-Berlin, 2001