

Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

Text 14 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

Aufgabe 13.1: Finden Sie ausgehend von den Definitionen $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ möglichst einfache Darstellungen für die Terme

$$\cosh(x) + \sinh(x) \quad \text{und} \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) \\ \text{sowie} \quad \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$$

Lösung

13.1a

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x$$

13.1b

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})) = 1 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Identität $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ wird auch als **hyperbolischer Pythagoras** bezeichnet.

13.1c

$$\begin{aligned} &\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y) \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \\ &= \frac{1}{4} ((e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})) \\ &= \frac{1}{4} (e^x e^y + e^x e^{-y} + e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y} + e^x e^y - e^x e^{-y} - e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}) \\ &= \frac{1}{4} (2e^x e^y + 2e^{-x} e^{-y}) = \frac{1}{2} (e^{x+y} + e^{-(x+y)}) = \cosh(x+y) \end{aligned}$$

Bemerkung: Dies ist ein Additionstheorem für hyperbolische Funktionen.

Aufgabe 13.2: Finden Sie ausgehend von den Definitionen $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ und $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ möglichst einfache Darstellungen für die Terme

$$\cos(x) + i \sin(x) \quad \text{und} \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) \\ \text{sowie} \quad \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

Lösung

13.2a

$$\begin{aligned} \cos(x) + i \sin(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + i \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \\ &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix} + e^{ix} - e^{-ix}) = e^{ix} \end{aligned}$$

Bemerkung: $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ ist die berühmte eulersche Formel.

13.2b

$$\begin{aligned}\cos^2(x) + \sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2ix} + 2 + e^{-2ix} - (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})) = 1\end{aligned}$$

13.2c

$$\begin{aligned}\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) &= \\ \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} &= \\ \frac{1}{4} ((e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) + (e^{ix} - e^{-ix})(e^{iy} - e^{-iy})) &= \\ \frac{1}{4} (2e^{ix}e^{iy} + 2e^{-ix}e^{-iy}) &= \\ \frac{1}{2} (e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}) &= \cos(x+y)\end{aligned}$$

Aufgabe 13.3a: Zeigen Sie bitte, dass die Differenz $d = r_1 - r_2$ für alle Hyperbelpunkte $P(x, y)$ konstant ist und bestimmen Sie d . Die Brennpunkte der Einheitshyperbel

$$x^2 - y^2 = 1 \quad (3)$$

sind hier mit $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ und $F_2(\sqrt{2}, 0)$ gegeben.

Lösung

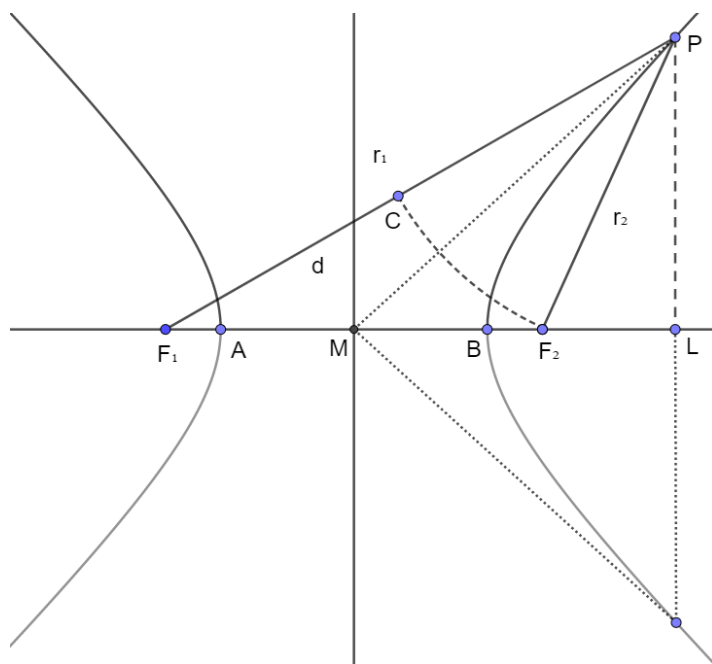


Bild 14.1

Mit $x = |\overline{ML}|$ und $y = |\overline{LP}|$ gilt im rechtwinkligen Dreieck PF_1L $r_1^2 = (x + \sqrt{2})^2 + y^2$ und im rechtwinkligen Dreieck PF_2L $r_2^2 = (x - \sqrt{2})^2 + y^2$. Also folgt

$$\begin{aligned}
 d &= r_1 - r_2 = \sqrt{(x + \sqrt{2})^2 + y^2} - \sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + y^2} \\
 &= \sqrt{x^2 + 2x\sqrt{2} + 2 + y^2} - \sqrt{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 + y^2}
 \end{aligned}$$

Da die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ es erlaubt, y^2 durch $x^2 - 1$ unter den Wurzeln zu ersetzen, folgt weiter

$$\begin{aligned}
 d &= \sqrt{2x^2 + 2x\sqrt{2} + 1} - \sqrt{2x^2 - 2x\sqrt{2} + 1} \\
 &= \sqrt{(\sqrt{2}x)^2 + 2(\sqrt{2}x)1 + 1^2} - \sqrt{(\sqrt{2}x)^2 - 2(\sqrt{2}x)1 + 1^2} \\
 &= \sqrt{(\sqrt{2}x + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}x - 1)^2} = \sqrt{2}x + 1 - (\sqrt{2}x - 1) = 2
 \end{aligned}$$

Aufgabe 13.3b: Auf welche Weise kann man nun mithilfe der Einheitshyperbel den $\cosh(\psi)$ und $\sinh(\psi)$ veranschaulichen?

Lösung Die Hyperbelgleichung $x^2 - y^2 = 1$ und der hyperbolischer Pythagoras $\cosh^2(\psi) - \sinh^2(\psi) = 1$ liefern die Antwort vermöge

$$x = \cosh^2(\psi) \quad \text{und} \quad y = \sinh(\psi) .$$

Was unter dem Winkel ψ zu verstehen ist, werde ich weiter unten erläutern.

Aufgabe 13.3c: Die Gleichung (3) und der Satz von Pythagoras legen ein einfaches Verfahren nahe, um mit Zirkel und Lineal Punkte der Hyperbel zu konstruieren. Suchen Sie bitte nach einem geeigneten Konstruktionsverfahren.

Lösung

- Die einfachste Vorgehensweise, um hier Hyperbelpunkte zu konstruieren besteht wohl darin, dass man z. B. zunächst mit einer Strecke r_2 um F_2 einen Kreis schlägt und dann mit der Strecke $r_1 = r_2 + 2$ einen Kreis um F_1 . Die Schnittpunkte der beiden Kreise, falls vorhanden, sind dann stets Punkte der Hyperbel.

- Will man jedoch zu einer vorgegebenen x -Koordinate den zugehörigen Punkt $P(x, y)$ konstruieren, so ist der folgende Weg hilfreich. Der Hyperbelgleichung $x^2 - y^2 = 1$ entnimmt man die Koordinaten der Punkte A und B in dem Bild 14.1 zu $A(-1, 0)$ und $B(1, 0)$. Damit liegen A und B auf dem Rand des Einheitskreises um M . Die Koordinaten eines Hyperbelpunktes $P(x, y)$ können nun vermöge $x^2 = 1^2 + y^2$ als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks MLQ (siehe Bild 14.2) mit der Hypotenuse x und den Katheten 1 und y verstanden werden. Wenn der Thaleskreis über $x = |\overline{ML}|$ den Einheitskreis in Q bzw. Q' schneidet, dann ist $y = |\overline{QL}| = |\overline{Q'L}|$. Der Mittelpunkt des Thaleskreises ist hier mit T bezeichnet. Die Schnittpunkte P und P' des Kreises um L mit Radius y mit der Lotrechten zur x -Achse in L sind dann die erwünschten Hyperbelpunkte.

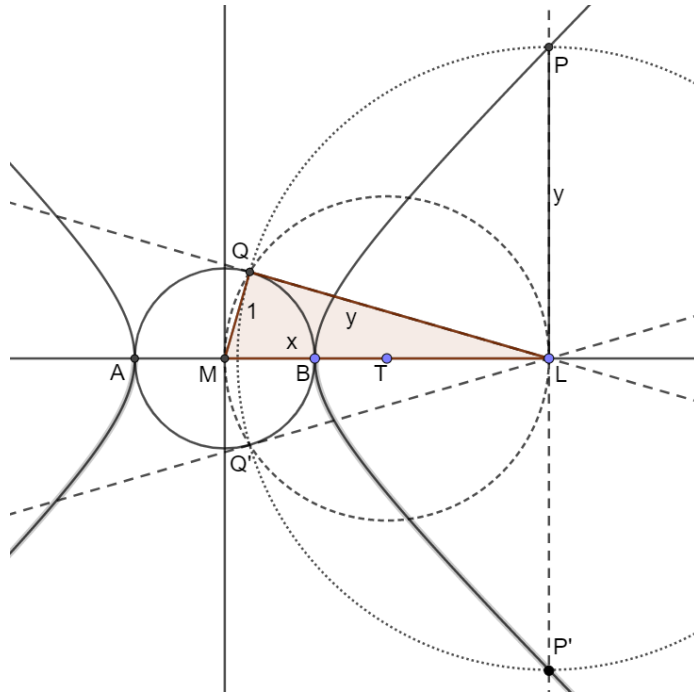


Bild 14.2

Bemerkungen zu Winkeln am Einheitskreis und an der Einheitshyperbel

Bewegt man nach Bild 14.3 auf dem Einheitskreisrand einen Punkt P aus dem Punkt B im mathematisch positiven Drehsinn aus dem Punkt B heraus, dann ist die Bogenlänge φ die der Punkt P auf der Kreislinie zurücklegt das Bogenmaß des Winkels BMP . Negative Winkelmaße ergeben sich, wenn P im mathematisch negativen Drehsinn aus B heraus bewegt wird. Hat der Punkt P die Koordinatendarstellung (x, y) , dann kann man die trigonometrischen Funktionen anschaulich definieren vermöge

$$\begin{array}{lll} \sin \varphi & := & y \\ \cos \varphi & := & x \\ \tan \varphi & := & \frac{y}{x} \\ \cot \varphi & := & \frac{x}{y} \\ \sec \varphi & := & \frac{1}{x} \\ \csc \varphi & := & \frac{1}{y} \end{array}$$

Da der Flächeninhalt des Einheitskreises mit π ebenso groß ist wie der halbe Umfang des Kreises, liegt der Gedanke nahe Winkel auch als Flächeninhalte zu deuten. Da der Flächeninhalt $\mathcal{A}$ des farbig ausgemalten Kreissektors in Bild 14.3a sich zur ganzen Kreisfläche π genau so verhält wie die Bogenlänge $\widehat{P'P} = 2\varphi$ zum Umfang 2π des Kreises folgt mit $\frac{\mathcal{A}}{\pi} = \frac{2\varphi}{2\pi}$

$$\mathcal{A} = \varphi$$

Also kann der Winkel φ sowohl als Flächeninhalt eines Einheitskreissektors als auch als die zugehörige halbe Bogenlänge dieses Sektors verstanden werden.

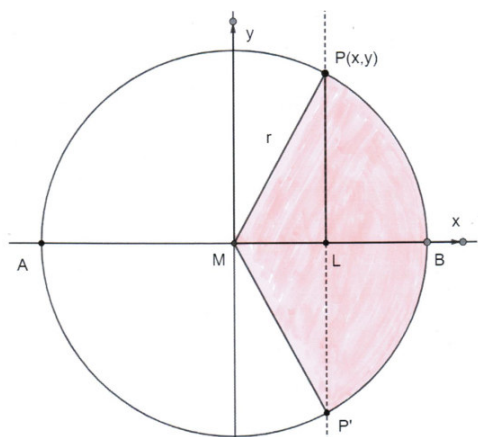


Bild 14.3a

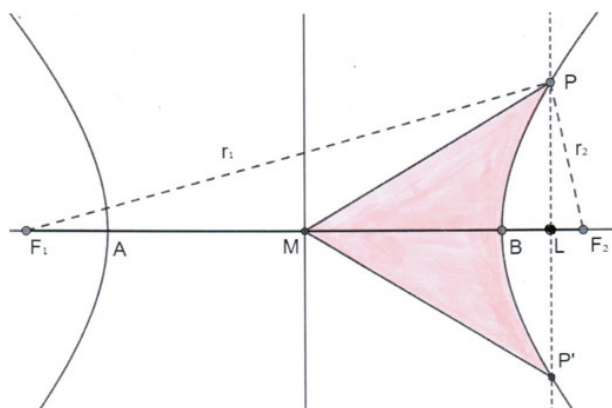


Bild 14.3b

Das Bild 14.3b zeigt die Einheitshyperbel und mit A , B , P und P' vier Hyperbelpunkte. Für die x -Koordinate von P gilt $x = |\overline{ML}| = \cosh(\psi)$ und für die y -Koordinate gilt $y = |\overline{PL}| = \sinh(\psi)$. Der Winkel ψ ist damit gleich dem Flächeninhalt $\mathcal{F}$ der eingefärbten Fläche, die der Hyperbelbogen aus dem Dreieck $MP'P$ herauschneidet. Um das einsichtig zu machen, zeigen wir $\mathcal{F} = \operatorname{arccosh}(x)$. Dabei bezeichnet meine Mathematiksoftware mit $\operatorname{arccosh}(x)$ die Umkehrfunktion der Kosinus hyperbolicus Funktion und es gilt dann

$$\mathcal{F} = \operatorname{arccosh}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \cosh(\mathcal{F}) = x$$

Dieses Symbol $\operatorname{arccosh}$ ist meines Erachtens nicht klug gewählt, denn diese Umkehrfunktion heißt *Areacossinus hyperbolicus* und nicht Arkuscossinus hyperbolicus. Die Arkusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Das Wortteil *Arcus* steht für Kreisbogen und das Wortteil *Area* für Fläche bzw. Flächeninhalt. In der Literatur finden sich übrigens eine Vielzahl von Schreibweisen wie z. B. Acosh , $\operatorname{arccosh}$, arcosh und acosh .

Aufgabe 14.1a: Zeigen Sie zunächst ausgehend von den Definitionen $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ das gilt

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

Nun zur Bestimmung von $\mathcal{F}$. Da die Flächenanteile von $\mathcal{F}$ über und unterhalb der x -Achse gleich groß sind, reicht es, den Anteil über der x -Achse zu bestimmen und das Ergebnis dann zu verdoppeln. Also gilt mit dem Flächeninhalt F_{MLP} des Dreiecks MLP

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= 2 \left(F_{MLP} - \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} \, dt \right) \\ &= 2 \left(\frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} \, dt \right) = x\sqrt{x^2 - 1} - 2 \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} \, dt \end{aligned}$$

Das Integral $\int_1^x \sqrt{t^2 - 1} \, dt$ kann man mithilfe der Substitution $t = \cosh z$ und der Folgerung $\frac{dt}{dz} = \sinh z$ bzw. $dt = \sinh(z) dz$ umformen zu

$$\int_1^x \sqrt{t^2 - 1} \, dt = \int_{\operatorname{arccosh} 1}^{\operatorname{arccosh} x} \sqrt{\cosh^2 z - 1} \sinh(z) dz = \int_{\operatorname{arccosh} 1}^{\operatorname{arccosh} x} \sinh^2(z) dz$$

Der letzte Gleichungsschritt folgt mit dem hyperbolischen Pythagoras. Nun nutzen wir die *Partielle Integration*

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

um das Integral $\int_{\operatorname{arccosh} 1}^{\operatorname{arccosh} x} \sinh^2(z) dz$ zu erfassen. Es gilt unabhängig von den Integrationsgrenzen

$$\begin{aligned} \int \sinh^2(z) dz &= \sinh(z) \cosh(z) - \int \cosh^2(z) dz \\ &= \sinh(z) \cosh(z) - \int (1 + \sinh^2(z)) dz \\ &= \sinh(z) \cosh(z) - \int 1 dz - \int \sinh^2(z) dz \\ &= \sinh(z) \cosh(z) - z - \int \sinh^2(z) dz \end{aligned}$$

Schafft man beide Integrale auf die linke Gleichungsseite und teilt dann mit 2 so folgt

$$\int \sinh^2(z) dz = \frac{1}{2} (\sinh(z) \cosh(z) - z) + C$$

bzw.

$$\int \sinh^2(z) dz = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\cosh^2 z - 1} \cosh(z) - z \right) + C$$

Ersetzen wir nun wieder $\cosh(z)$ durch t , so folgt

$$\begin{aligned} \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt &= \int_{\operatorname{arccosh} 1}^{\operatorname{arccosh} x} \sinh^2(z) dz \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{t^2 - 1} \cdot t - \operatorname{arccosh} t \right) \right]_1^x \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 - 1} \cdot x - \operatorname{arccosh} x \right) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{1^2 - 1} \cdot 1 - \operatorname{arccosh} 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 - 1} \cdot x - \operatorname{arccosh} x \right) \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt $\mathcal{F}$ gilt damit

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= x\sqrt{x^2 - 1} - 2 \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt \\ &= \sqrt{x^2 - 1} \cdot x - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 - 1} \cdot x - \operatorname{arccosh} x \right) \\ &= \operatorname{arccosh} x = \psi \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 14.1b: Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq 1$

$$\operatorname{arccosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

Aufgabe 14.1c: Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

Drei Übungen zu einfachen Mittelwerten:

Aufgabe 14.2a: Bestimmen Sie bitte für die zwei Zahlen 1 und $\sqrt{2}$ das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel.

Aufgabe 14.2b: Bestimmen Sie bitte für die drei Zahlen 2, 5 und 9 das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel.

Aufgabe 14.2c: Im folgenden Bild 14.4 sind zwei Kreisbögen zu sehen. Die zugehörigen Kreismittelpunkte sind M und C . Die Strecke $\overline{EF}$ verläuft parallel zur Strecke $\overline{AB}$ und steht senkrecht auf $\overline{CD}$. Betrachtet man die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$, dann kann man aus ihren Streckenlängen $|\overline{AD}|$ und $|\overline{DB}|$ das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel gewinnen. In der Zeichnung sind die, zu diesen drei Mittelwerten zugehörigen Strecken, bereits vorhanden. Finden Sie diese Strecken und begründen Sie Ihre Entscheidung.

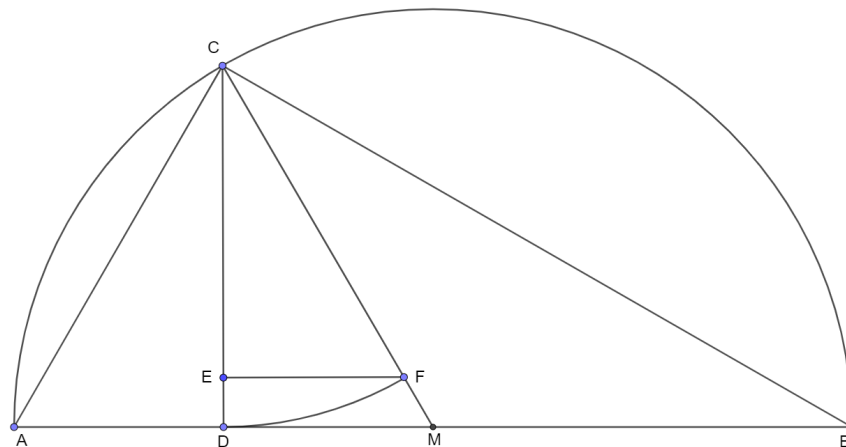


Bild 14.4

Bemerkungen: Man sollte fortan wissen, was man unter trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen und ihren Umkehrfunktionen zu verstehen hat. Auch sollte die Deutung der Argumente der hyperbolischen und der trigonometrischen Funktionen als Flächeninhalte verstanden sein. Der Nachweis, dass das Argument ψ von $\cosh \psi$ gleich dem Flächeninhalt von $\mathcal{F}$ ist, wird nicht verlangt.

Literatur:

- [17] Heuser, Harro, Lehrbuch der Analysis Teil 1, B. G. Teubner Stuttgart 1993.
- [19] Bronstein-Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik 7. Auflage, Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1969
- [20] Scheid, Harald, Elemente der Geometrie 3. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg-Berlin, 2001
- [21] Bartsch, Hans-Jochen, Taschenbuch Mathematischer Formeln, 19. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig, 2001