

Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

Text 15 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

Aufgabe 14.1a: Zeigen Sie zunächst ausgehend von den Definitionen $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ das gilt

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

Lösungen

- für $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh x &= \frac{d}{dx} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{de^x}{dx} - \frac{de^{-x}}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left(e^x - \frac{de^{-x}}{d(-x)} \cdot \frac{d(-x)}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x \end{aligned}$$

- für $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$. Die Lösung der Aufgabe 13.1a lieferte die Gleichung $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$. Damit folgt

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{d(e^x - \sinh x)}{dx} = \frac{de^x}{dx} - \frac{d \sinh x}{dx} = e^x - \cosh(x) = \sinh x$$

Aufgabe 14.1b: Zeigen Sie für $1 \leq x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Lösung Mit $\operatorname{arccosh} x = y$ folgt $x = \cosh y$ bzw.

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{1}{2} (e^y + \frac{1}{e^y}). \quad \text{Setzt man } e^y = z \quad \text{und formt die Gleichung}$$

$$x = \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z}) \quad \text{um zu } z^2 - 2xz + 1 = 0, \quad \text{dann hat diese quadratische Gleichung die}$$

Lösungen $z_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$. Damit gilt $e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ bzw.

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{mit } x \geq 1$$

Die monoton fallende Lösung $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ entfällt, da $\operatorname{arccosh} x$ beginnend vom Punkt $(1, 0)$ streng monoton steigt. Dies folgt aus dem in Text 14 geführten Nachweis von $\mathcal{F} = \operatorname{arccosh} x$ und im Bild 14.3b veranschaulicht. Das folgende Bild 15.1 zeigt die Graphen der beiden Areafunktionen $\operatorname{arccosh} x$ und $\operatorname{arsinh} x$ die sich im ersten Quadranten asymptotisch einander nähern.

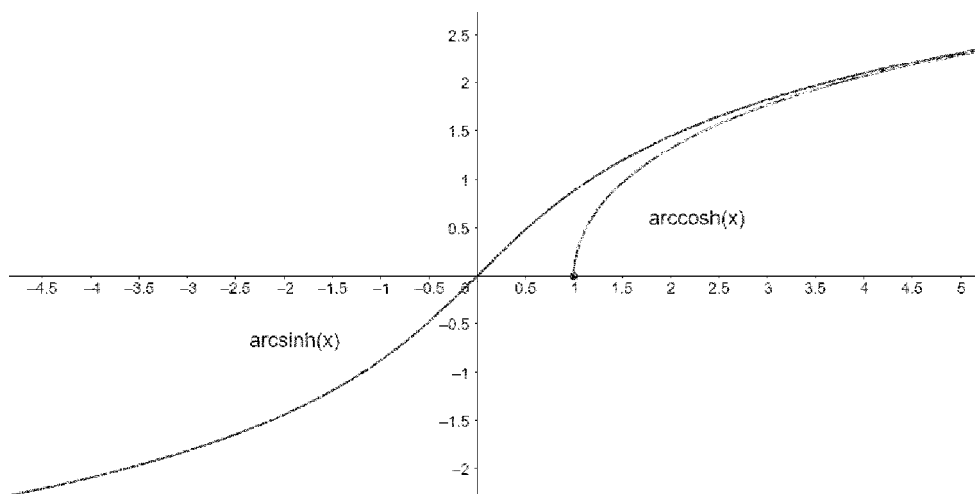


Bild 15.1

Aufgabe 14.1c: Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Lösung Mit $\operatorname{arcsinh} x = y$ folgt $x = \sinh y$ bzw. $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{1}{2}(e^y - \frac{1}{e^y})$.
Setzt man $e^y = z$ und formt die Gleichung $x = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})$ um zu $z^2 - 2xz + 1 = 0$,
dann hat diese quadratische Gleichung die Lösungen $z_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Damit gilt
 $e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$ bzw.

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{mit } x \geq 1$$

Die formal mögliche Lösung $y = \ln(x - \sqrt{x^2 + 1})$ entfällt, da mit $x < \sqrt{x^2 + 1}$ das Argument $x - \sqrt{x^2 + 1}$ stets negativ ist, der Logarithmus aber eines positiven Argumentes bedarf.

Drei Übungen zu einfachen Mittelwerten:

Aufgabe 14.2a: Bestimmen Sie bitte für die zwei Zahlen 1 und $\sqrt{2}$ das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel.

Lösungen

- $a_M = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) \approx 1.207106781$
- $g_M = \sqrt{1 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \approx 1.189207115$
- $h_M = 2 / \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{4(2-\sqrt{2})}{2} = 4 - 2\sqrt{2} = 2(2 - \sqrt{2}) \approx 1.171572875$

Aufgabe 14.2b: Bestimmen Sie bitte für die drei Zahlen 2, 5 und 9 das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel.

Lösungen

- $a_M = \frac{1}{3}(2 + 5 + 9) = \frac{16}{3} = 5.\bar{3}$
- $g_M = \sqrt[3]{2 \cdot 5 \cdot 9} = \sqrt[3]{90} \approx 4.4814047467$
- $h_M = 3 / \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \right) = \frac{270}{73} = 3\frac{51}{73} = 3.\overline{69863013}$

Aufgabe 14.2c: Im folgenden Bild 14.4 sind zwei Kreisbögen zu sehen. Die zugehörigen Kreismittelpunkte sind M und C . Die Strecke $\overline{EF}$ verläuft parallel zur Strecke $\overline{AB}$ und steht senkrecht auf $\overline{CD}$. Betrachtet man die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$, dann kann man aus ihren Streckenlängen $|\overline{AD}|$ und $|\overline{DB}|$ das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel gewinnen. In der Zeichnung sind die, zu diesen drei Mittelwerten zugehörigen Strecken, bereits vorhanden. Finden Sie diese Strecken und begründen Sie Ihre Entscheidung.

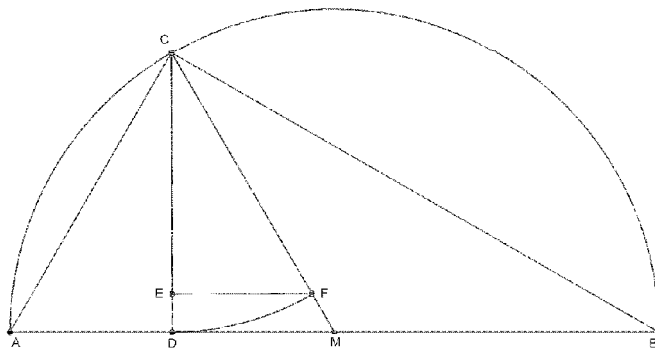


Bild 14.4

Lösungen

Das Dreieck ABC im Thaleskreis über AB ist rechtwinklig.

- $a_M = |\overline{AM}| = |\overline{CM}| = |\overline{BM}|$, gilt wegen $\frac{1}{2}(|\overline{AD}| + |\overline{DB}|) = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$, denn $\frac{1}{2}|\overline{AB}|$ ist der Radius des Thaleskreises.
- $g_M = \sqrt{|\overline{AD}| \cdot |\overline{DB}|} = |\overline{CD}|$, gilt wegen des Höhensatzes von Euklid, denn $|\overline{CD}|$ ist die Höhe und $|\overline{AD}|$ und $|\overline{DB}|$ sind die zugehörigen Hypotenusenabschnitte des Dreiecks ABC .
-

$$h_M = 2 / \left(\frac{1}{|\overline{AD}|} + \frac{1}{|\overline{DB}|} \right) = 2 / \frac{|\overline{AD}| + |\overline{DB}|}{|\overline{AD}| \cdot |\overline{DB}|} = 2 \cdot \frac{|\overline{AD}| \cdot |\overline{DB}|}{|\overline{AD}| + |\overline{DB}|} = \frac{\sqrt{|\overline{AD}| \cdot |\overline{DB}|}^2}{\frac{|\overline{AD}| + |\overline{DB}|}{2}} = \frac{(g_M)^2}{a_M}$$

Mit der so gewonnenen Gleichung $h_M = \frac{(g_M)^2}{a_M}$ gilt auch

$$\frac{h_M}{g_M} = \frac{g_M}{a_M} \quad \text{bzw.} \quad \frac{|\overline{CE}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{CF}|}{|\overline{CM}|}$$

Im Bild 14.4 ist die Strecke $\overline{CE}$ so konstruiert, dass die Dreiecke CEF und CDM einander ähnlich sind. Mit dem Strahlensatz gilt dann $\frac{|\overline{CE}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{CF}|}{|\overline{CM}|}$ und also folgt

$$h_M = |\overline{CE}|.$$

Antworten auf eingesandte Fragen und Hinweise

Zunächst danke ich allen, die mir Fragen zum Verständnis der Texte und Hinweise auf fehlerhafte Stellen haben zukommen lassen. Hier nun meine Antworten und ergänzenden Bemerkungen. Da das eine oder andere Thema mehrfach angesprochen wurde habe ich die Antworten in der Reihenfolge der Vorlesungstexte geordnet.

Text 07 Zum Zusammenhang von Tonleitern und Logarithmen

Im Text 07 hatte ich im Zusammenhang mit der pythagoreischen Stimmung geschrieben:

"Wir nutzen heute den Quotienten der Frequenzen zweier Töne um ein Intervall zu erfassen. Dabei wird die Frequenz des höheren Tones im Zähler notiert. So gilt dann für

die Oktave $\frac{f_c}{f_C} = \frac{2}{1} = 2$ und die reine Quinte $\frac{f_G}{f_C} = \frac{3}{2}$.

Der Addition der Intervalle entspricht dabei die Multiplikation der Frequenzverhältnisse. Geht man vom G eine weitere Quinte nach oben, so gilt

$$\frac{f_d}{f_C} = \frac{f_G}{f_C} \cdot \frac{f_d}{f_G} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} > 2.$$

Der Ton d liegt damit über der Oktave $\frac{f_c}{f_C}$. Wenn man ihn eine Oktave tiefer setzt, erhält man vermöge

$$\frac{f_D}{f_C} = \frac{f_d}{f_C} / \frac{f_d}{f_D} = \frac{9}{4} / \frac{2}{1} = \frac{9}{8} = 1.125$$

den Ton D."

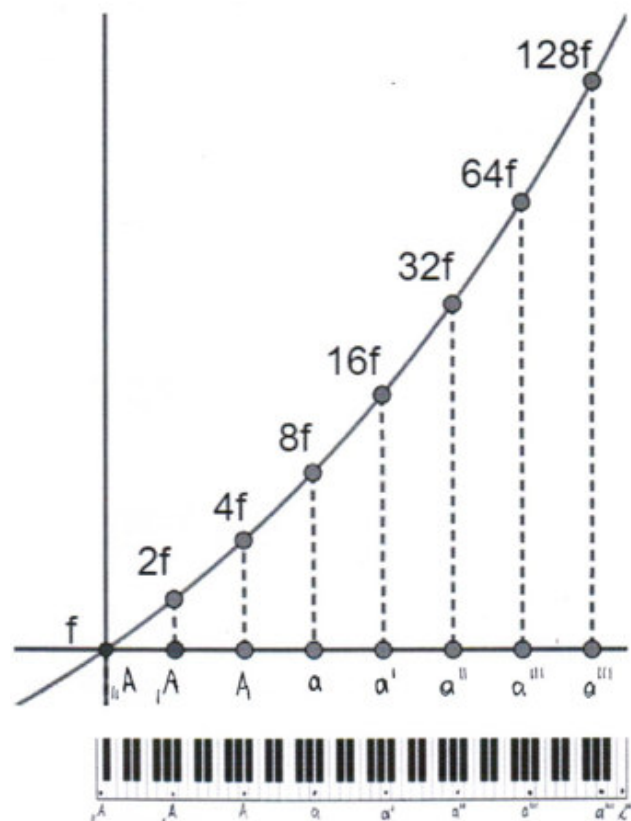
Hier ist "Der Addition der Intervalle entspricht dabei die Multiplikation der Frequenzverhältnisse." der entscheidende Satz. Der Zeile

$$\frac{f_d}{f_C} = \frac{f_G}{f_C} \cdot \frac{f_d}{f_G} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

entspricht somit die Zeile

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{9}{4}\right)$$

Würde man auf einen Ton mit der Frequenz f eine Oktave setzen und darauf wieder eine Oktave u.s.w., dann wachsen die Frequenzen exponentiell gemäß $2^x f$. Dies zeigt die folgende Grafik von $f(x) = 2^x f$.



Die waagerechte Gerade liegt eine Einheit über der nichteingezeichneten x-Achse. Unter dem Logarithmus wird die Exponentialfunktion vermöge

$$\ln(2^x f) = \ln(2^x) + \ln(f) = \ln(2) \cdot x + \ln(f)$$

zu einer linearen Funktion. Diese Linearität zeigt sich in der Klaviertastatur. Werden zwei Tasten angeschlagen, so erklingt ein Intervall. Schlägt man zwei weitere Tasten an, die den gleichen Abstand zueinander haben, hört man das gleiche Intervall.

Fehlerkorrektur in Text 07: In der Definitionsgleichung

$$f(Q, O_k) := \left(\frac{3}{2}\right)^Q 2^{-O_k}$$

fehlte das Minuszeichen vor **O_k** im Exponenten von 2^{-O_k} .

Text 08 Zum bertrandschen Paradoxon

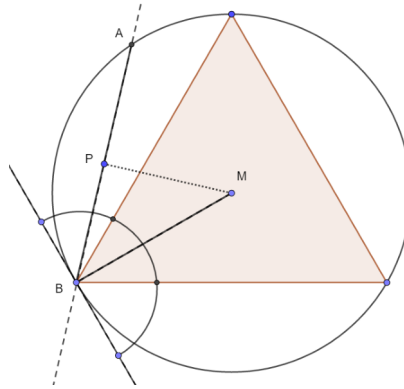
Ein **Zufallsexperiment** zur Erzeugung von Sehnen im Kreis fiel mir ein, als ich mich des folgenden Gedichtes von *Joachim Ringelnatz* erinnerte.

Flie und Ele

*Fliegend entfernten sich die Fliegen.
Doch ließen sie auf Ei und Kaviar
Zwei, drei, vier Fliegenexkremente liegen.
Die aß der Mensch und ward es nicht gewahr.
Ein Elefant bemerkte diesen Fall
Und rollte einen schweren, goldnen Ball
Nicht ohne leises Lächeln durch den Stall.*

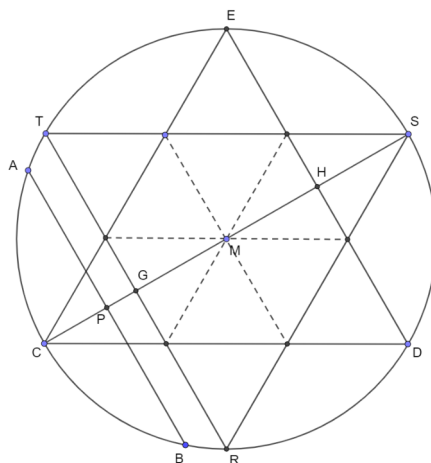
Das Zufallsexperiment könnte nach Wegfall der Corona- und Omikron-Beschränkungen in einem Biergarten stattfinden. Man benötigt dazu ein einen Bleistift, ein Lineal, ein leer getrunkenes Bierglas, einen Bierdeckel mit einer unbedruckten Seite und wenigstens eine der an warmen Sommertagen dort reichlichen vorhandenen Fliegen. Der Bierdeckel wird zunächst mit der unbedruckten Seite nach oben auf die Tischplatte gelegt und das Bierglas mit der Öffnung nach unten darüber gestülpt, sobald sich wenigstens einer der Flieger auf dem Deckel befindet. Zwei der in aller Regel hurtig produzierten Fliegenkleckse reichen nun aus, um mit Lineal und Stift die Sehne auf den Bierdeckel zu zeichnen.

Lösungsweg 1: Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit p_1 ist eine transparente Folie, wie sie für Overheadprojektoren genutzt werden, dienlich, wenn sie der folgenden Skizze entsprechend mit dem gleichseitigen Dreieck und seinem Umkreis in Bierdeckelgröße versehen ist.



Die Folie legt man nun so auf den Bierdeckel, dass eine Ecke des Dreiecks auf B zu liegen kommt und der zweite Punkt A auch auf der Umfangslinie liegt. Dann ist die Ergebnismenge Ω_1 gleich der Menge aller Punkte der Umfangslinie. Findet sich so der Punkt A auf dem Kreisbogen über der B gegenüberliegenden Dreiecksseite, dann ist die Sehne $\overline{AB}$ länger als eine Seite des gleichseitigen Dreiecks, andernfalls nicht. Da die Länge dieses Bogens $\frac{1}{3}$ des Kreisumfangs beträgt, gilt auch $p_1 = \frac{1}{3}$. Diese Argumentation führt natürlich zum gleichen Ergebnis wie die in der Vorlesung vorgestellte Winkelbetrachtung.

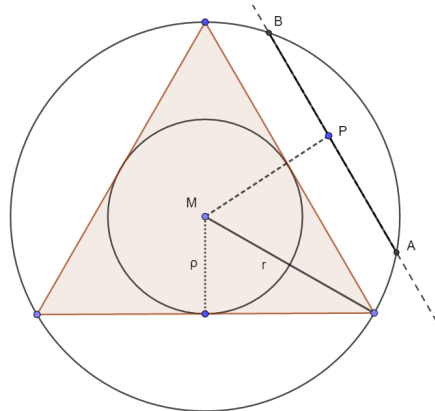
Lösungsweg 2: Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit p_2 kann man gleichfalls die oben beschriebene Folie vom Lösungsweg 1 gut nutzen, wenn sie der folgenden Skizze entsprechend mit einem zweiten gleichseitigen Dreieck RST ergänzt ist derart, dass ein regelmäßiger sechszackiger Stern (Hexagramm) zu sehen ist.



Die Folie legt man nun so auf den Bierdeckel, dass eine Seite eines der Dreiecke zu der Sehne $\overline{AB}$ parallel verläuft. Die Menge aller Punkte die zu dem Kreisdurchmesser $\overline{CS}$ gehören, der senkrecht zu $\overline{AB}$ steht, ist dann die zugehörige Ergebnismenge Ω_2 . Liegt der Schnittpunkt P von der Sehne und dem Durchmesser zwischen G und H, dann ist die Sehne länger als eine der Dreiecksseiten. Damit gilt $p_2 = \frac{|\overline{GH}|}{|\overline{CS}|} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$.

Lösungsweg 3: Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit p_3 verwendet man eine Folie mit aufgedrucktem Dreieck nebst In- und Umkreis. Man legt dann auch hier die

Folie so auf den Bierdeckel, dass eine Seite des Dreiecks zu der Sehne $\overline{AB}$ parallel verläuft. Mit P sei nun der Mittelpunkt der Sehne bezeichnet. Liegt P dann im Inkreis, dann ist die Sehne länger als eine der Dreiecksseiten.



Damit ist Ω_3 die Menge aller Punkte im Umkreis. Die Menge E der Punkte im Inkreis repräsentieren unser günstiges Ereignis. Also folgt

$$p_3 = \frac{\text{Flächeninhalt des Inkreises}}{\text{Flächeninhalt des Umkreises}} = \frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{1}{4}r^2}{r^2} = \frac{1}{4}$$

Text 09 Zur σ -Algebra, Erläuterungen zur Lösung von Aufgabe 9.1e

9.1e: Notieren Sie bitte alle Ereignisse der σ -Algebra $\mathcal{A}$ über unserer Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, die mit $\{1\}$ und $\{2\}$ genau nur zwei einelementige Ereignisse enthält.

Lösung:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{ccc} \emptyset & & \\ \{1\} & \{3, 4\} & \{2\} \\ \{2, 3, 4\} & \{1, 2\} & \{1, 3, 4\} \\ \Omega & & \end{array} \right\}$$

Beachten Sie, dass sich aus den Ereignissen von $\mathcal{A}$ bezüglich der Operationen Vereinigen, Schneiden und Komplementärmengenbildung keine neuen Mengen erzeugen lassen. Insbesondere ist z. B. die Teilmenge $\{2, 4\}$ von Ω nicht in $\mathcal{A}$ enthalten. $\mathcal{A}$ ist also bezüglich dieser Operationen abgeschlossen. Von Gruppen $(G, \circ)$ und Körpern $(K, +, \cdot)$ in der klassischen Algebra erwartet man auch, dass sie bezüglich ihrer Rechenoperationen bzw. Verknüpfungen abgeschlossen sind. Die Mengen in der zweiten Zeile von $\mathcal{A}$ $\{1\}$, $\{3, 4\}$ und $\{2\}$ sind paarweise disjunkt und liefern vereinigt die Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Diese drei Mengen bilden damit eine **Zerlegung** von Ω in paarweise disjunkte Teilmengen.

Eine andere Zerlegung von $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ wäre z. B. $\{2\}$ und $\{1, 3, 4\}$. Diese Zerlegung liefert die folgende σ -Algebra $\mathcal{B}$ über $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{ccc} & \emptyset & \\ \{2\} & & \{1,3,4\} \\ & \Omega & \end{array} \right\}$$

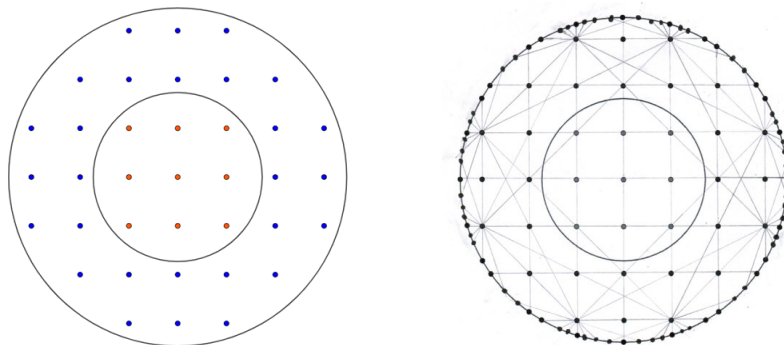
So ist auch

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset \\ \Omega \end{array} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{C} = \left\{ \emptyset \quad \Omega \right\}$$

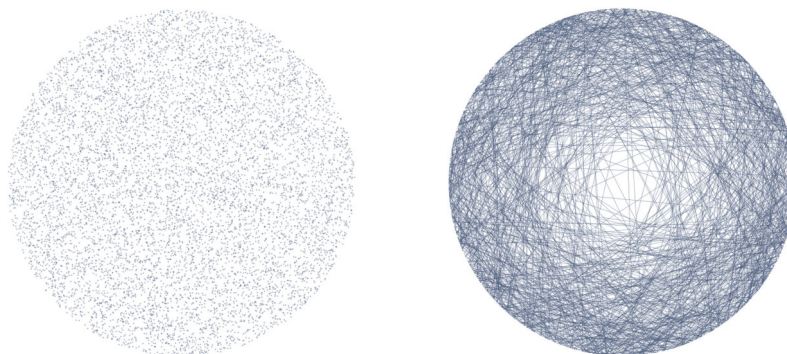
eine σ -**Algebra** über Ω . $\mathcal{C}$ ist die triviale σ -**Algebra**. Die Bedeutung der σ -**Algebren** besteht darin, dass bestimmte Mengen der Potenzmenge von Ω entfernt werden können. Da es z. B. unter der Potenzmenge der reellen Zahlen zwischen -1 und 1 nichtmessbare Mengen gibt, müssen die entfernt sein, wenn wir den Mengen Wahrscheinlichkeiten zuordnen wollen, denn die Wahrscheinlichkeit ist ja ein Maß.

Text 10 Zum bertrandschen Paradoxon u. Gleichverteilung

Die Gitterpunkte eines kartesischen Koordinatensystems sind über die Ebene hin gleichverteilt. Dies ist im folgenden linken Bild zu sehen. Versteht man diese Punkte als Mittelpunkte von Kreissehnen und zeichnet sämtliche zugehörigen Sehnen hinzu, dann erhält man das rechte Bild. Die vorhandenen Gitterlinien sind auch Sehnen.



Der Punkt im Zentrum soll weder Kreismittelpunkt noch Gitterpunkt sein sondern für das Auge unmerklich aus der Mitte verschoben. Damit entfallen sogar noch die zwei Sehnen mit der Länge des Kreisdurchmessers. Die Sehnen sind hier offensichtlich nicht gleichverteilt. Im Zentrum sind wenige zu sehen und zum Kreisrand häufen sie sich. Dazu die entsprechenden Bilder aus Text 10.



Text 11 Zur Folge der S_n und dem ersten cantorschen

Diagonalverfahren

Während das erste cantorsche Diagonalverfahren alle denkbaren rationalzahligen Brüche durchläuft, liefert die Folge der Q_n nur die vollständig gekürzten Brüche. Die Formeln $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\binom{n-k}{k-1} \bmod 2 \right)$ und $Q_n = \frac{S_n}{S_{n+1}}$ machen es möglich den Bruch Q_n nach n -Schritten direkt zu bestimmen vermöge

$$Q_n = \frac{\sum_{k=1}^n \left(\binom{n-k}{k-1} \bmod 2 \right)}{\sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n+1-k}{k-1} \bmod 2 \right)}$$

ohne eine Tabelle anlegen zu müssen. Hier einige ersten Folgenglieder und drei weitere

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = \frac{1}{2}, \quad Q_3 = 2, \quad Q_4 = \frac{1}{3}, \quad Q_5 = \frac{3}{2}, \quad \dots, \quad Q_{675} = \frac{66}{29}, \quad Q_{676} = \frac{29}{79}, \quad Q_{677} = \frac{79}{50} \quad \dots$$

Natürlich ist ein programmierbarer Taschenrechner oder ein PC schon sehr hilfreich.

Text 13 Zu den Lösungen der Aufgaben von Text 12

Aufgabe 12.1f: In der Lösung ist die Geschwindigkeit fälschlich mit $35.28 \frac{m}{s}$ anstelle von $35.28 \frac{km}{h}$ angegeben.

Aufgabe 12.2a: Geben Sie bitte eine vollständige Lösung der obigen Differentialgleichung an.

Lösung *Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} x^2 = \frac{d^3 y(x)}{dx^3} = y'''(x) = 0$$

gewinnt man in drei Schritten mit Konstanten C_1 , C_2 und C_3 vermöge

$$y'''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y''(x) = C_1$$

$$y''(x) = C_1 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = C_1 x + C_2$$

$$y'(x) = C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

zu

$$y(x) = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Mit $C_1 = 2$, $C_2 = 0$ und $C_3 = 0$ erhält man dann die spezielle Lösung $y(x) = x^2$.

Bemerkung

- In der ursprünglichen Lösung ist ein **Fehler**. Der Bruch $\frac{1}{2}$ gehört in die rechte Gleichung. Oben sehen Sie die korrigierte Implikation und hier die falsche:

$$y'''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y''(x) = C_1$$

$$y''(x) = C_1 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = C_1 x + C_2$$

$$y'(x) = \left(\frac{1}{2} \right) C_1 x + C_2 \quad (\text{Fehler}) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

- Die Gleichungen rechts vom Implikationszeichen ($\Rightarrow$) differenziert ergeben die Gleichungen links vom Implikationszeichen.

- Konstanten C können stets mit reellen Zahlen ungleich Null multipliziert, dividiert, potenziert und radiziert werden. Das Ergebnis ist ja dann immer noch eine Konstante.
- Das Fallgesetz $l(t) = \frac{1}{2} g_n t^2$ hätte man auch in der Gestalt $l(t) = Ct^2$ schreiben können. Doch mit $l(t) = \frac{1}{2} g_n t^2$ ist $v(t) = \frac{d}{dt} l(t) = g_n t$ die Momentangeschwindigkeit und $\frac{d}{dt} v(t) = g_n$ die Normalfallbeschleunigung. Der klug gewählte Faktor $\frac{1}{2}$ schafft zugleich physikalische Einsichten.

Aufgabe 12.2d:

Die geniale von Leibniz entwickelte Notation $\frac{d}{dx}f(x)$ bzw. $\frac{df(x)}{dx}$ symbolisiert den Differentialquotienten. Newton hatte stattdessen $\dot{f}(x)$ einen Punkt über das f gesetzt. Diese Notation nutzen wir heute noch in der Form $f'(x)$. Also gilt

$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} f(x) = \ddot{f}(x) = f'''(x) = 0$$

Text 14 Zu hyperbolischem Pythagoras und Winkel ψ

Aufgabe 13.3b: Auf welche Weise kann man nun mithilfe der Einheitshyperbel den $\cosh(\psi)$ und $\sinh(\psi)$ veranschaulichen?

Lösung Die Hyperbelgleichung $x^2 - y^2 = 1$ und der hyperbolischer Pythagoras $\cosh^2(\psi) - \sinh^2(\psi) = 1$ liefern die Antwort vermöge

$$x = \cosh(\psi) \quad \text{und} \quad y = \sinh(\psi) .$$

$$x = \cosh(\psi) \quad \text{und nicht} \quad x = \cosh^2(\psi)$$

Bemerkung: Am Einheitskreis konnten wir für trigonometrische Funktionen die Winkel φ als Bogenlängen beziehungsweise als Kreissektoren (Flächen) geometrisch deuten. Die Einheitshyperbel erlaubt nur die Deutung als Fläche. ψ ist der Flächeninhalt der dunkel ausgemalten Fläche im Bild rechts.

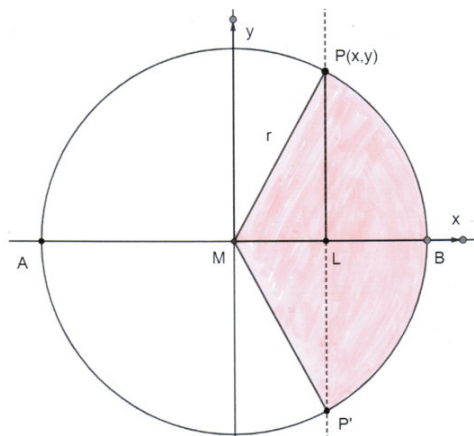


Bild 14.3a

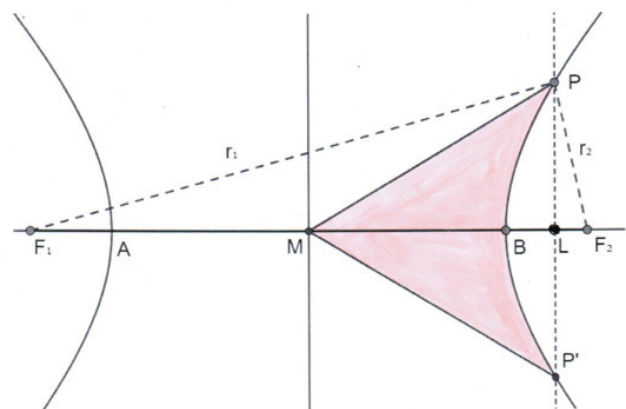


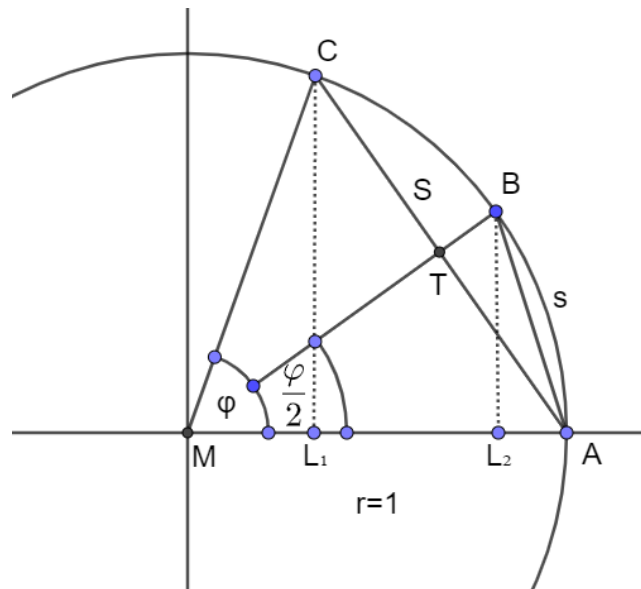
Bild 14.3b

Antwort auf eine zusätzliche Frage:

Frage: Wie gelingt es mithilfe der Formel $\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos \varphi}{2}}$ die ceulensche Verdopplungsformel $s = \sqrt{2 - \sqrt{4 + S^2}}$ herzuleiten?

Antwort: Für die Sehne $S = \overline{AC}$ im Einheitskreis gilt $|\overline{ML_1}| = \cos \varphi$ und $|\overline{CL_1}| = \sin \varphi$. Die Gerade BM teilt die Sehne im Punkt T . Mit Pythagoras folgt in dem rechtwinkligen Dreieck ACL_1

$$\begin{aligned} S^2 &= (1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi = 1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 + 2 \cos \varphi + 1 \\ &= 2 - 2 \cos \varphi = 2(1 - \cos \varphi) \quad \text{bzw.} \quad \cos \varphi = 1 - \frac{1}{2} S^2 \end{aligned}$$



Für die Sehne $s = \overline{AB}$ im Einheitskreis gilt $|\overline{ML_2}| = \cos \frac{\varphi}{2}$ und $|\overline{BL_2}| = \sin \frac{\varphi}{2}$. Also folgt in dem rechtwinkligen Dreieck ABL_2 analog auch hier

$$s^2 = \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right)$$

und weiter mit $\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}$ und $\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2} S^2$

$$s^2 = 2 \left(1 - \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}\right) = 2 \left(1 - \sqrt{\frac{1 + 1 - \frac{1}{2} S^2}{2}}\right) = 2 - 2 \sqrt{1 - \frac{1}{4} S^2}$$

bzw.

$$s = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S^2}}$$

Vielen Dank für die Fülle der Fragen. Die Fragen zum bertrandschen Paradoxon fand ich besonders herausfordernd und ich hoffe, dass meine Antworten für Sie hilfreich sind. Die nichtmathematischen Fragen werde ich Ihnen noch beantworten. Bei noch bestehenden Unklarheiten rufen Sie mich bitte unter 02663-9688354 an.