

"Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen"

Text 01 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

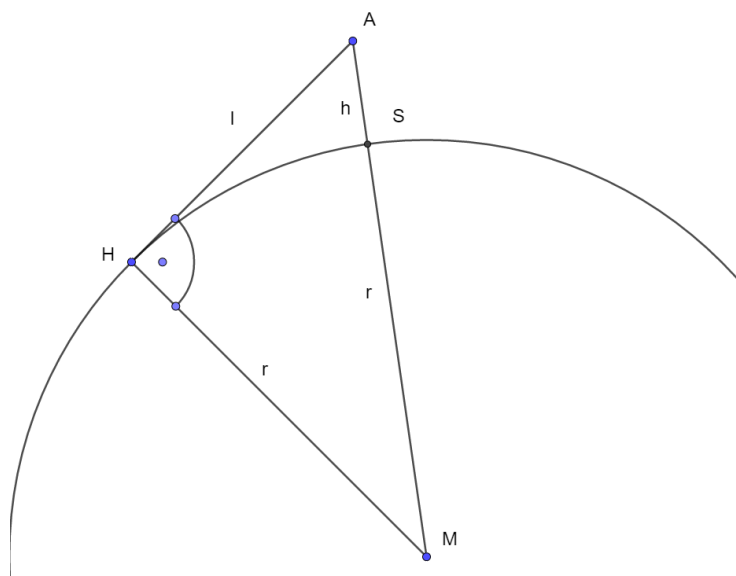
Im Sommer 2019 las ich in einem Gemeindebrief einen schönen und sprachlich sehr wohl gelungenen Aufsatz zum Thema *Urlaub am Meer*. Daraus sind hier einige wenige Zeilen wiedergegeben.

„Dabei ist es vor allen Dingen die Weite, die ich am Meer liebe. Schier unendlich dehnt es sich vor einem aus, berührt irgendwo ganz weit weg in der Ferne den Horizont. Und was hinter diesem Horizont ist, frage ich mich dann immer. Letztes Jahr stand ich in Belgien am Strand des Ärmelkanals und schaute angestrengt, ob ich irgendwo ganz in der Ferne nicht vielleicht doch England sehen könnte. Doch es gab nur die Weite des Meeres und des Himmels. Ich fand es wundervoll.“

Dieser Text regte mich zu der folgenden Aufgabe an.

Aufgabe: Man steht am Strand vor der ruhigen und spiegelglatten See und die Augen befinden sich in der Höhe h über der Uferlinie. Bestimmen Sie die Entfernung l von einem Auge bis zum Horizont. Dabei sei eine geradlinige Lichtausbreitung unterstellt und der mittlere Erdumfang mit $U = 40030 \text{ km}$ gegeben.

Lösung:



Bezeichnet man den Erdradius mit r , dann folgt mit der Skizze für die gesuchte Größe l mit dem Satz von Pythagoras $(r + h)^2 = r^2 + l^2$ und weiter $l = \sqrt{h^2 + 2rh}$. Da h sehr klein gegenüber dem Erdradius r ist, gilt

$$l \approx \sqrt{2rh}$$

und mit $U = 2\pi r$ folgt

$$l(h) \approx \sqrt{\frac{U \cdot h}{\pi}}$$

Beispiel: Für $h = 170 \text{ cm} = 0.00170 \text{ km}$ erhält man dann

$$l(h) \approx \sqrt{\frac{U \cdot h}{\pi}} = \sqrt{\frac{40030 \text{ km} \cdot 0.00170 \text{ km}}{\pi}} \approx 4.654 \text{ km}$$

Bemerkungen:

- Die vorgestellte Aufgabe sollten Schüler zum Ende der Jahrgangsstufe 9 bewältigen können.
- Bei dem Umrechnen von Längen-, Flächen- und Raummaßen ist es für die Schüler aller Jahrgangsstufen eine sehr große Hilfe, wenn sie auch Dekameter (dam) und Hektometer (hm) kennen. So ist ein Quadratdekameter ein Ar und ein Quadrathektometer ein Hektar. Hier einige Präfixe des SI-Einheitensystems. Die vollständige Tabelle finden sie bei Wikipedia auf der Seite 'Vorsätze für Maßeinheiten'.

M	Mega	gr. méga = groß	10^6	1.000.000
k	Kilo	gr. chílioi = tausend	10^3	1.000
h	Hekto	gr. hekatón = hundert	10^2	100
da	Deka	gr. déka = zehn	10^1	10
—	—	—	10^0	1
d	Dezi	lat. decimus = Zehnter	10^{-1}	0,1
c	Zenti	lat. centum = hundert	10^{-2}	0,01
m	Milli	lat. mille = tausend	10^{-3}	0,001
μ	Mikro	gr. mikrós = klein	10^{-6}	0,000 001

Die vermutete Weite des Meeres schrumpft durch Nachrechnen zu einer relativ kleinen Strecke. Nachfolgend geht es weiter um den Erdenball und größere Strecken. Zum Ausmessen großer Strecken in der Antike erfährt man in 'Der große Roman der Mathematik' von Mickaël Launay, sinngemäß das Folgende:

"Zu den Berufen, die in der Antike mit Geometrie zu tun haben, muss auch der des Bematischen gerechnet werden. Während die Landvermesser und andere Seilspanner Felder und Bauwerke vermessen, haben diese Männer die Aufgabe, durch das Zählen ihrer Schritte weite Entfernungen auszumessen.

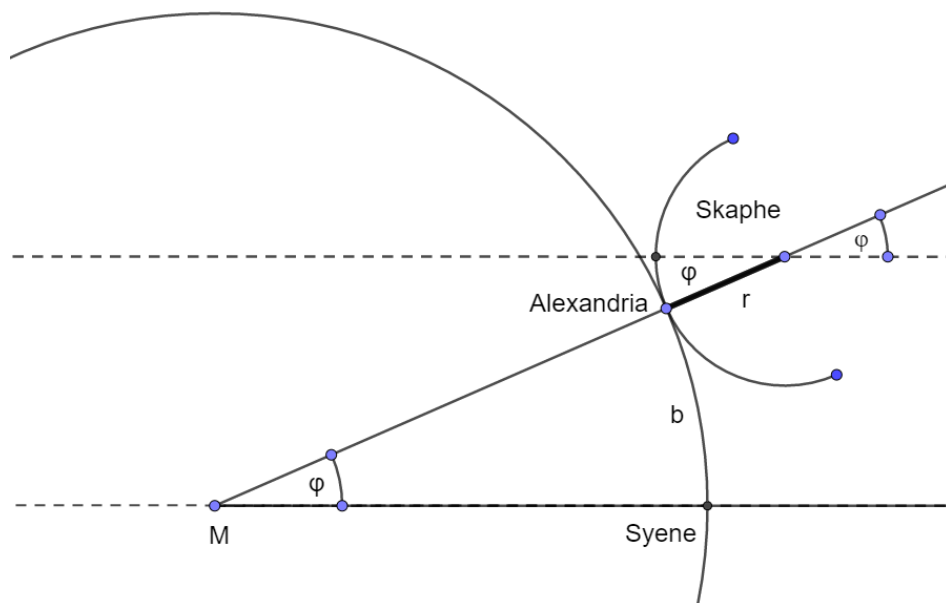
So hatten die Bematischen, die Alexander der Große im 4. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung auf seinem Asienfeldzug mitnahm, Strecken von mehreren tausend Kilometern zu messen. Versuchen Sie sich vorzustellen, wie sich das seltsame Schauspiel dieser Männer, die die riesigen Gefilde des Mittleren Ostens im Gleichschritt durchschreiten, aus der Vogelperspektive ausnimmt. Sehen Sie, wie sie die Hochebenen Obermesopotamiens hinter sich lassen, an den kargen gelben Kulissen der Sinai-Halbinsel entlanggehen und zu den fruchtbaren Ufern des Niltals gelangen, dann kehrtmachen, die Bergmassive des Perserreiches und die Wüsten des heutigen Afghanistan bewältigen. Sehen Sie, wie sie in starrem, monotonen Rhythmus unerschütterlich weiter und immer weiter marschieren und zu Fuß die gigantischen Berge des Hindukusch übersteigen, um schließlich, unverdrossen ihre Schritte zählend, die Ufer des Indischen Ozeans zu erreichen.

Das Bild ist ergreifend und die Maßlosigkeit des Unternehmens scheint unsinnig. Die Resultate jedoch sind von bemerkenswerter Genauigkeit. Die Differenz zwischen den Messungen dieser Männer und den heute bekannten tatsächlichen Entfernungen beträgt im Durchschnitt weniger als 5 Prozent. Alexanders Bematischen haben also eine zahlenmäßige Beschreibung der Geographie seines Reiches ermöglicht, eines riesigen Gebietes, wie es nie zuvor vermessen worden war.

Zwei Jahrhunderte später fasst in Ägypten ein Gelehrter mit griechischen Wurzeln, Eratosthenes († um 194 v.Chr.) ist sein Name, ein noch viel größeres Projekt ins Auge. Er will den Umfang der Erde bestimmen. Natürlich kommt es nicht in Frage, Bematisten zur Umrundung des Planeten auf die Reise zu schicken. Stattdessen hat Eratosthenes auf der Grundlage scharfsinniger Beobachtungen über die Differenz zwischen den Neigungswinkeln der Sonnenstrahlen in Syene, heute Assuan, und Alexandria berechnet, dass die Entfernung zwischen den beiden Städten einem Fünfzigstel des Erdumfangs entsprechen müsste. Die Weglänge von Alexandria bis Syene ermittelten wieder Bematisten. Im Unterschied zu ihren griechischen Kollegen zählen die ägyptischen Bematisten jedoch nicht ihre Schritte, sondern die eines sie begleitenden Kamels. Diese Tiere sind nämlich berühmt für ihren gleichmäßigen Gang. Nach langen Tagestouren am Nil entlang wissen sie, dass beide Städte 5000 Stadien voneinander entfernt liegen. Der Umfang der Erde müsste demnach 250 000 Stadien (gleich 39375 km) betragen. Einmal mehr ist das Ergebnis von einer unglaublichen Genauigkeit, weiß man doch heute, dass der gerundete mittlere Erdumfang 40030 km beträgt"

Bemerkung: Das dort genannte Längenmaß *Stadion*, der Plural ist *Stadia* bzw. *Stadien*, beträgt hier 157.5 m. Die Entfernung b von Assuan und Syene beträgt demnach 5000 Stadia bzw. $5000 \cdot 157.5 \text{ m} = 787.5 \text{ km}$. Das *Stadion* repräsentierte in verschiedenen Regionen und zu anderen Zeiten andere Streckenlängen.

Die nachstehende Skizze zeigt vereinfacht das Verfahren von Eratosthenes zur Bestimmung des Erdumfangs U . Der angedeutete große Kreis mit Mittelpunkt M steht für die Erdkugel. Der rechte offene Halbkreis steht für eine Skaphe. Hier darf man sich die Skaphe als eine offene hohle Halbkugel mit einem auf dem Boden der Kugel stehenden Radius vorstellen. Parallel zum oberen Rand sind im Abstand von jeweils einem Grad Kreislinien im Inneren der Halbkugel markiert. Setzt man diese Skaphe bei Sonnenschein auf eine ruhige Wasseroberfläche, so kann man durch den Schattenwurf des Radius den Winkel φ ablesen.



Ein von rechts her einfallender Sonnenstrahl, hier gestrichelt dargestellt, bildet also mit dem Radius r der Skaphe in Alexandria den Winkel φ . Wenn ein Jahr später in Syene

die Sonne senkrecht über der Skaphe steht, dann muss der Winkel unter dem Kreisbogen b gleich φ sein.

$$\text{Mit } \frac{U}{b} = \frac{360^\circ}{\varphi}, b = 787.5 \text{ km und } \varphi = 7.2^\circ \text{ folgt also } U = \frac{360^\circ \cdot 787.5 \text{ km}}{7.2^\circ} = 39375 \text{ km}$$

Bemerkungen:

- Dieses fächerübergreifende Thema "*Bestimmung des Erdumfangs*" ist besonders gut für die Klassenstufen 7 und 8 geeignet.
- In Wikipedia finden sich unter dem Stichwort 'Erdumfang' auch die folgenden sinngemäß wiedergegebenen Informationen. "Im frühen Mittelalter ermittelten die Araber die zu einem Winkelgrad zugehörige Kreisbogenlänge des Erdumfangs zu $56\frac{2}{3}$ arabischen Meilen. Da diese mit ca. 2 km gleichzusetzen ist, ergibt sich der Umfang des Erdkörpers zu $U = 40800 \text{ km}$, der 2% vom heutigen Wert abweicht. Der Mathematiker *Al-Biruni* ermittelte im Jahr 1023 mit einem von ihm erfundenen neuen Messverfahren den Umfang der Erdkugel schließlich auf 39833 km.
- Im 15. Jahrhundert waren diese Werte in Europa wahrscheinlich bekannt, doch wurde den arabischen Werten teilweise die um 25% kürzere italienische Meile zugewiesen. Auf dieser Basis und bei gleichzeitiger Überschätzung der Länge Asiens kam Kolumbus wohl zu dem letztlich fehlerhaften Schluss, dass man auf Westkurs in wenigen Wochen nach Ostasien gelangen müsste.
- Der griechische Philosoph Poseidonius († 51 v.Chr.) hatte den Erdumfang auf etwa 35500 km errechnet.
- In einer mündlichen Prüfung sollten Sie den hier vorgestellten Gedankengang von Eratosthenes wiedergeben können.
- Unter <https://lehrplaene.bildung-rp.de/> finden Sie die rheinlandpfälzischen Lehrpläne der Mathematik.

Literatur: *Der große Roman der Mathematik* von Mickaël Launay, Verlag C•H•Beck, 2019