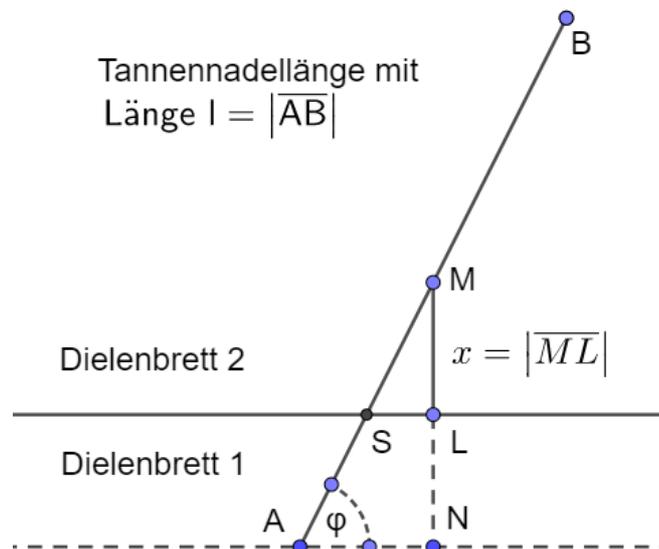


## "Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen"

Text zur Vorlesung 03 im WS von Hans-Ulrich Brandenburger

**Aufgabe 2.3:** Prof. Dr. P. Nibel bekannt durch seine Habilitationsschrift über das postweihnachtliche Abnadeln von Weihnachtsbäumen der Art *Abies nordmannia* in zentralgeheizten Mietwohnungen mit protestantische Mietern in mitteleuropäischen Diasporagemeinden, belauert seit Weihnachten 2020 seinen Weihnachtsbaum. Gegenwärtig hängt nur noch die eine von ursprünglich 187259 Nadeln über dem sorgfältig gesäuberten und gewachsen Dielenboten. Augenblicklich geht er experimentell der Frage nach, mit welcher Wahrscheinlichkeit  $P$  eine zufällig herabfallende Tannenbaumnadel der Länge  $l = 3\text{cm}$  auf genau zwei Dielenbrettern zu liegen kommt. Die Dielenbretter haben Raumlänge und eine Breite von  $d = 8\text{cm}$ . Bestimmen Sie bitte diese Wahrscheinlichkeit  $P$  bevor die Nadel fällt.

**Lösung:** In der folgenden Skizze symbolisiert die Strecke  $\overline{AB}$  die Tannennadel mit der Länge  $l$ . Die Lage der Tannennadel ist durch die Angabe der zwei Parameter  $x$  und  $\varphi$  vollständig beschrieben.  $x$  bezeichnet den Abstand des Mittelpunktes  $M$  der Tannenbaumnadel zu der Trennlinie  $t$  zwischen den zwei benachbarten Dielen 1 und 2. Dabei ist  $S$  der Schnittpunkt der Geraden  $AB$  mit  $t$ .  $L$  ist der Lotfußpunkt von  $M$  auf  $t$ .  $\varphi$  ist der Winkel zwischen dem Vektor  $\overrightarrow{SL}$  und dem Vektor  $\overrightarrow{SB}$ . Die gestrichelt dargestellte Gerade  $AN$  soll eine Parallele zu  $SL$  sein.



Wenn die Dielenbreite  $d$ , wie in der Aufgabenstellung vorgegeben, die Nadellänge  $l$  übertrifft, dann kann  $x$  jeden Wert zwischen Null und halbe Dielenbreite annehmen. Also gilt

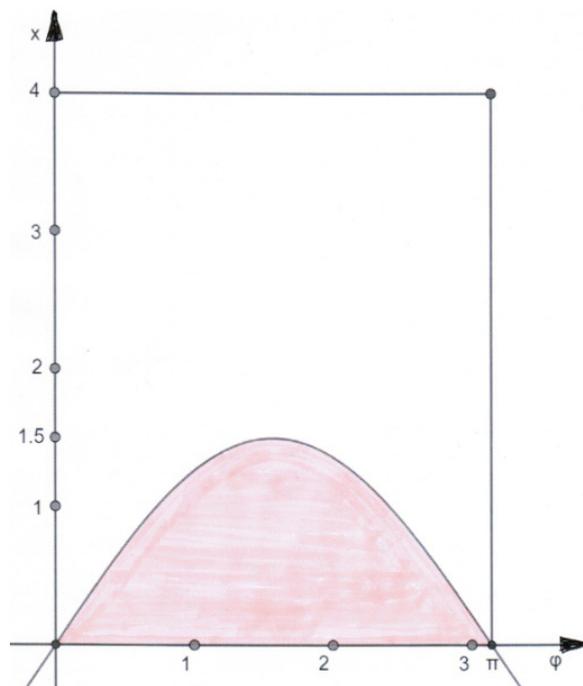
$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}d \quad \text{und} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Versteht man das Fallen der Tannenbaumnadel als ein Zufallsexperiment, dann repräsentiert jedes Zahlenpaar  $(\varphi, x)$  ein mögliches Ergebnis. Die zugehörige Ergebnismenge  $\Omega$  kann man sich nun als die Menge aller Punkte eines Rechtecks mit den Seitenlängen  $\frac{1}{2}d$  und  $\pi$  denken. Dies veranschauliche die folgende Skizze unten.

Wenn für ein Paar  $(\varphi, x)$  der Mittelpunkt  $M$  der Nadel auf der Diele 2 liegt und bei gegebenem Winkel  $\varphi$  die untere Nadelspitze  $A$  die Trennlinie  $t$  berührt, dann muss die Gleichung

$$\frac{x}{\frac{1}{2} \cdot l} = \sin \varphi \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sin \varphi$$

erfüllt sein. Der Funktionsgraph von  $x(\varphi) = \frac{1}{2}l \sin \varphi$  zerlegt dabei das Rechteck in zwei disjunkte Gebiete. Oberhalb des Graphen findet man in dem Rechteck alle Paare  $(\varphi, x)$  mit  $x > \frac{1}{2}l \sin \varphi$ . Auf und unterhalb des Graphen befinden sich die Paare  $(\varphi, x)$  mit  $x \leq \frac{1}{2}l \sin \varphi$ .



Kommt der Nadelmittelpunkt  $M$  auf einen Punkt des eingefärbten Gebietes zu liegen, dann erreicht die Nadel die Trennlinie  $t$  oder schneidet sie. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P$  gilt damit

$$P = \frac{\int_0^{\pi} \frac{1}{2} l \sin \varphi d\varphi}{\frac{1}{2} d \cdot \pi} = \frac{l}{d\pi} [-\cos \varphi] \Big|_0^{\pi} = -\frac{l}{d\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{2l}{d\pi}$$

bzw. mit  $l = 3$  und  $d = 8$

$$P = \frac{2l}{d\pi} = \frac{2 \cdot 3}{8 \cdot \pi} = \frac{3}{4\pi} \approx 0.2387324$$

#### Bemerkungen:

- Diese Aufgabe ist eine Variante der Buffonschen-Nadelaufgabe. Siehe auch [1] und [2]. Hätte Dr. P. Nibel die Tannenbaumnadel  $n$  mal beliebig auf seinen Boden fallen lassen und dann die Anzahl  $k$  der Fälle bestimmt, bei denen die Nadel zwei Dielen berührt, dann hätte er wahrscheinlich vermöge  $\frac{k}{n} \approx P = \frac{2l}{d\pi}$  mit  $\pi \approx \frac{2l}{d} \cdot \frac{n}{k}$  einen Näherungswert für  $\pi$  stochastisch gewinnen können. Diese Aufgabe macht es möglich, den Grundgedanken der Monte-Carlo-Methode zu verstehen, die es erlaubt, mithilfe der numerischen Statistik an schwer zugängliche Zahlen zu gelangen. Diese Methode findet

Anwendung in der Teilchenphysik und Quantenmechanik.

- Im Oberstufenunterricht habe ich es bei der Behandlung geometrischer Wahrscheinlichkeiten stets für sinnvoll gehalten die Buffonsche-Nadelaufgabe und den zugehörigen Lösungsweg vorzustellen. Zum Üben und Prüfen nutzt man dann allerdings einfachere Fragen. Dazu als Beispiel die folgende Aufgabe.

**Aufgabe 3.1:** Wenn zwei Zahlen  $p$  und  $q$  zufällig und stochastisch unabhängig voneinander aus dem Intervall  $[1, 2]$  gegeben werden, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit  $P$ , dass die quadratische Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  reelle Lösungen besitzt?

Nun zur Lösung der

**Aufgabe 2.1:** Zeigen Sie bitte  $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} = 0$

**Lösung:** Setzt man  $w = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$ , dann folgt aus  $w = \sqrt{2 + w}$  durch Quadrieren  $w^2 - w - 2 = 0$ . Die einzige positive Lösung dieser quadratischen Gleichung ist  $w = 2$  und so erhält man  $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} = \sqrt{2 - w} = 0$ . ■

Und weiter zur Lösung der

**Aufgabe 2.2:** Der griechische Mathematiker Archimedes (288-212 v.Chr.) hatte für die Annäherung an  $\pi$  anstelle eines Quadrates ein regelmäßiges Sechseck als Startfigur gewählt. Berechnen Sie mithilfe der *Ceulenschen Verdoppelungsformel* die ersten vier Näherungswerte für  $\pi$ .

**Lösung:** Im Einheitskreis ist die Seitenlänge  $s_1$  des einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks gleich der Länge des Radius  $r = 1$ . Drei Seitenlängen liefern dann den halben Umfang des Sechsecks. Folglich gilt mit

$$s_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

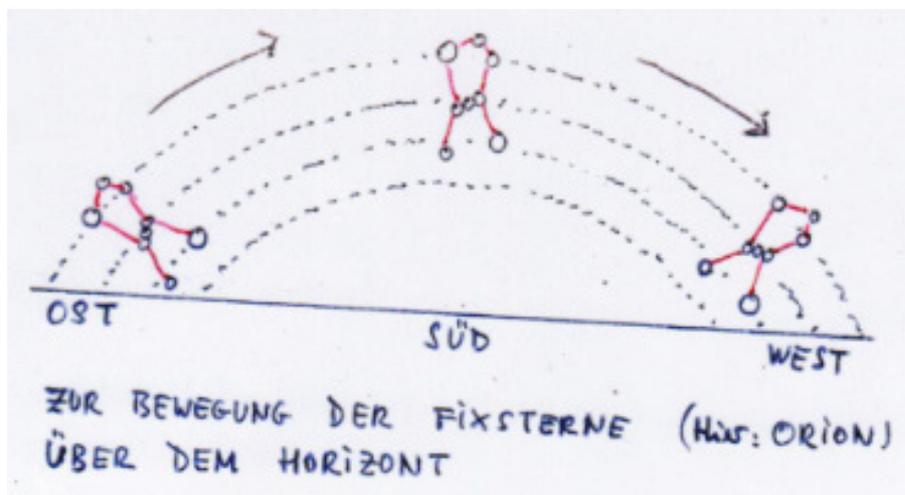
$$\begin{aligned} \pi_1 &= 3 \cdot 2^0 \cdot 1 &= 3 \\ \pi_2 &= 3 \cdot 2^1 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} &\approx 3.10582854 \\ \pi_3 &= 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} &\approx 3.13262861 \\ \pi_4 &= 3 \cdot 2^3 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} &\approx 3.13935020 \\ \pi_5 &= 3 \cdot 2^4 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} &\approx 3.14103195 \\ &\vdots &&\vdots \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Archimedes näherte sich dem Kreisumfang  $2\pi$  zunächst mit einem einbeschriebenen und einem umbeschriebenen Sechseck. Die fortlaufende Halbierung der Seiten bis zu den beiden 96-Ecken führten dann zu der Abschätzung  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ . Siehe auch [3]. Den Nachweis der Irrationalität und den der Transzendenz von  $\pi$  findet man bei Siegel [4].

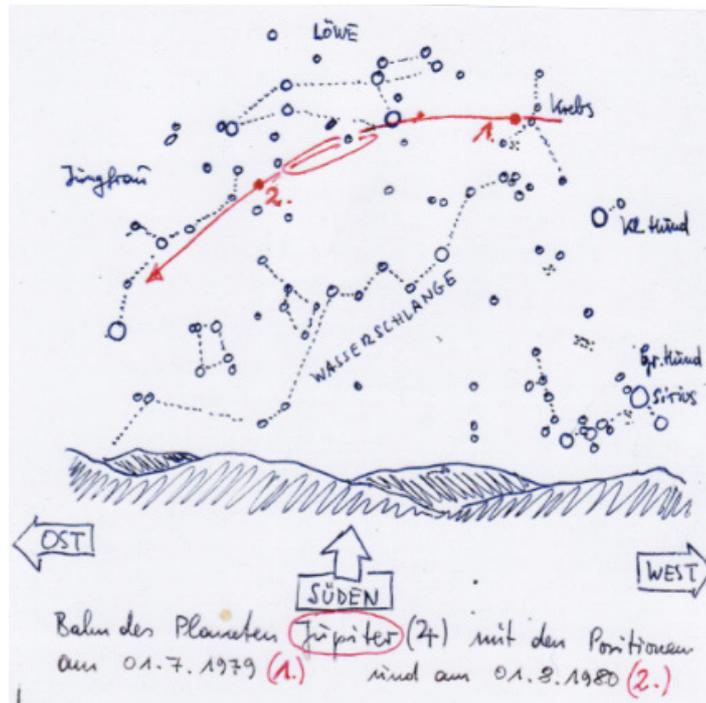
Nun einige Bemerkungen zum Blick auf die Gestirne.

Die Menschen im alten Ägypten besaßen keine Smartphones. Ihr Augen waren noch frei für den Blick auf die Umgebung und das Himmelszelt. Sterne, die ihre Abstände zu den Nachbarsternen scheinbar stets beibehalten, wir nennen sie heute Fixsterne, wandern allnächtlich von Osten nach Westen über die Beobachter hinweg. Es gibt die Zirkumpolarsterne, die das ganze Jahr über zu beobachten sind und es gibt Sterne, die nur zu bestimmten Zeiten zu sehen sind. Der Sirius, der hellste Stern, eigentlich ein Sternsystem am nächtlichen Himmel im Sternbild Hund ist kein Zirkumpolarstern. Den Ägyptern kündigte sein Erscheinen zwischen Mitte bis Ende Juni das Eintreffen der jährlichen Nilfluten an, die die Felder überschwemmten und düngten.

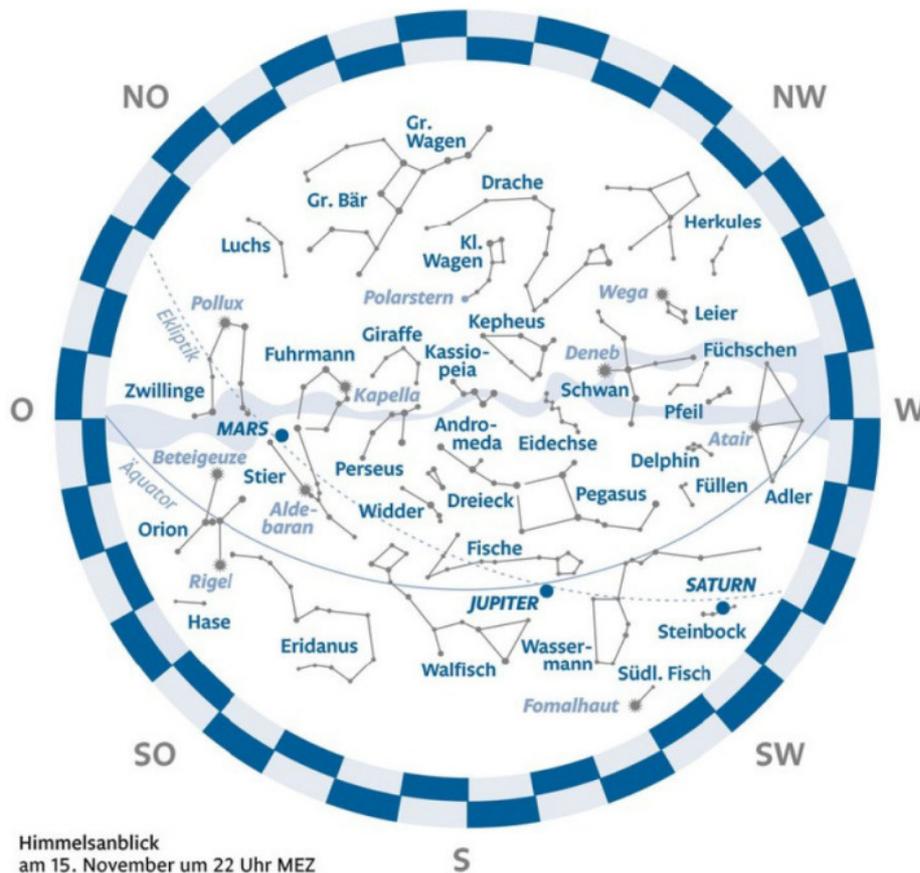
Uns kündigt der Sirius den Winter an. (*Im Osten sollte er gegenwärtig mitternächtlich über den Horizont hinaufgestiegen sein.*) Hier mag wohl eine der Wurzeln der Astrologie liegen, da die Bewegungen der Gestirne zukünftige Ereignisse vorhersagen. Gruppen von benachbarten Sternen wurden zu Figuren (Sternbildern) ergänzt und mit Namen versehen. Der *Große Bär*, das *Himmels W (Cassiopeia)* und *Orion* sind bekannte Sternbilder. Bei klarem Himmel können Sie zur Zeit das wunderschöne Sternbild Orion bei seiner nächtlichen Wanderung bestaunen. Dazu die folgende Skizze.



Vor der Kulisse des bewegten Fixsternhimmels bewegen sich allerdings einige Himmelskörper auf gänzlich eigenwillig gewählten Wegen. Es sind, abgesehen von Mond und Sonne, die einzigen mit unbewaffnetem Auge zu sehenden fünf Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn. In Ägypten hielt man sie für göttliche Lebewesen oder von Lebewesen bewegten Körpern. So wie ein Skarabäus auf Erden Dungkugeln über den Boden rollt, so könnte ein himmlischer Skarabäus die Planeten über das Himmelszelt rollen. Dies demonstriere die folgende Zeichnung mit der Wanderung des Planeten Jupiter in der Zeit vom Juli 1979 bis August 1980.

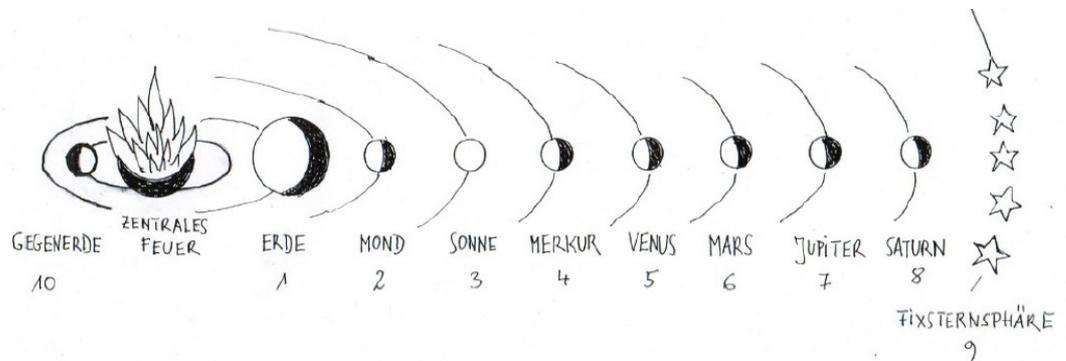


Die Rheinzeitung und ihre Regionalausgaben bieten ihren Lesern allmonatlich eine aktuelle Sternkarte mit einem informativen Begleittext zum Himmelsgeschehen. Die Karte soll Ihnen die Möglichkeit bieten eigene Beobachtungen zu machen.



Warum dieser Ausflug in die Astronomie? Die Antwort besteht darin, dass die

Versuche, die Bewegungen der Himmelskörper zu verstehen, in ganz hohem Maße mit der Entwicklung der Mathematik verknüpft ist. Der Pythagoräer Philolaos entwickelte bereits im 5. Jahrhundert vor Christus das nachstehend skizzierte Weltenmodell, in dem die Himmelskörper um ein zentrales Feuer kreisen.



Erwin Schrödinger, dem die Physik die Schrödinger-Gleichung und mehr verdankt, erklärt in seinem Buch *'Die Natur und die Griechen'* [5] wie dieses Modell zu verstehen ist. Dazu in der kommenden Vorlesung Text 04 mehr.

#### **Bemerkungen:**

Studenten, die die Lehrbefähigung für Oberstufe (S2) anstreben, sollten die Lösungswege der Aufgaben 2.3 und 3.1 in einer Prüfung wiedergeben können.

Die Lösungen der Aufgaben 2.1 und 2.2 und die Bemerkungen zur Astronomie sollte hier jeder wiedergeben können.

#### **Literatur:**

[1] *Grundkurs Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Hahn, Dzewas, Georg Westermann Verlag, 1978

[2] *Stochastik – Mathematik des Zufalls*, Zeidler, Vieweg+Teubner Verlag, 2012

[3] *Elemente der Mathematik-Mittelstufe Band 2*, Rheidt, Wolf, Athen, Verlag Schroedel-Schöning, 1965

[4] *Transzendente Zahlen*, Siegel, B-I-Hochschultaschenbücher, 1967

[5] *Die Natur und die Griechen*, Erwin Schrödinger, Paul Szolany Verlag, 1983,