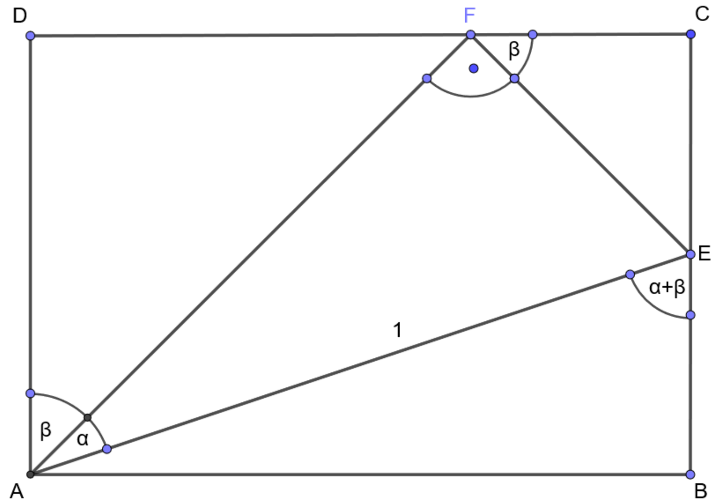
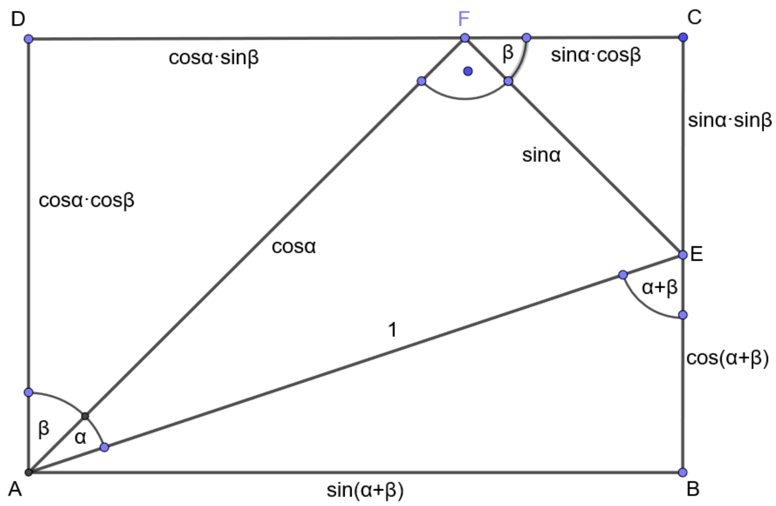
Einige Herleitungen der trigonometrischen Additionstheoreme

Herleitung 1:

Aufgabe: Sei $ABCD$ ein Rechteck und AEF ein rechtwinkliges Dreieck. Die Streckenlänge der Hypotenuse $\overline{AE}$ soll 1 betragen. Bestimmen Sie bitte die Streckenlängen $|\overline{AF}|$ und $|\overline{EF}|$ in Abhängigkeit von α und weiter $|\overline{AD}|$, $|\overline{DF}|$, $|\overline{CF}|$ und $|\overline{CE}|$ in Abhängigkeit von α und β und noch $|\overline{AB}|$ und $|\overline{BE}|$ in Abhängigkeit von $\alpha + \beta$.

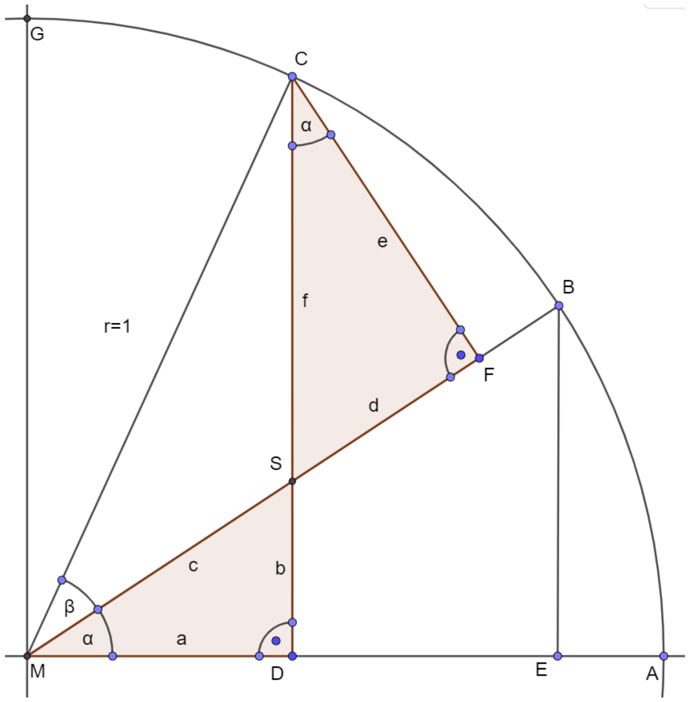


Die Lösungen entnimmt man der nachstehenden Skizze. Der Vergleich der gewonnen Längendarstellungen von gegenüberliegenden Seiten liefert die zwei Additionstheoreme für den Sinus und den Cosinus. Diese besonders anschauliche Herleitung gilt allerdings nur für positive Winkel α und β mit $\alpha + \beta < 90°$.



Herleitung 2: Im Einheitskreis sind die Winkel α und β, wie in der folgenden Skizze

zu sehen, gegeben. Die Strecke $\overline{CD}$ mit der Länge $\sin(\alpha+\beta)$ wird durch S in die zwei Teilstrecken $\overline{CS}$ und $\overline{DS}$ mit den Streckenlängen f und b zerlegt. Fällt man nun das Lot von C auf die Strecke $\overline{BM}$, dann sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke CSF und SMD einander ähnlich. Insbesondere ist der Winkel SCF gleich α.



- Im rechtwinkligen Dreieck CMF ist $|\overline{CF}| = e = \sin\beta$ und damit gewinnt man für das rechtwinklige Dreieck CSF vermöge $\frac{e}{f} = \cos\alpha$ und $\frac{d}{f} = \sin\alpha$ die Streckenlängen

$$f = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} \quad \text{und} \quad d = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha}$$

- Im rechtwinkligen Dreieck CMF ist $|\overline{MF}| = c + d = c + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha} = \cos\beta$ und also gilt

$$c = \frac{\cos\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha}$$

- Mit c und α können wir nun im rechtwinkligen Dreieck MDF die Streckenlängen a und b bestimmen. Es gilt dann vermöge $\frac{a}{c} = \cos\alpha$ und $\frac{b}{c} = \sin\alpha$

$$a = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \text{und} \quad b = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$

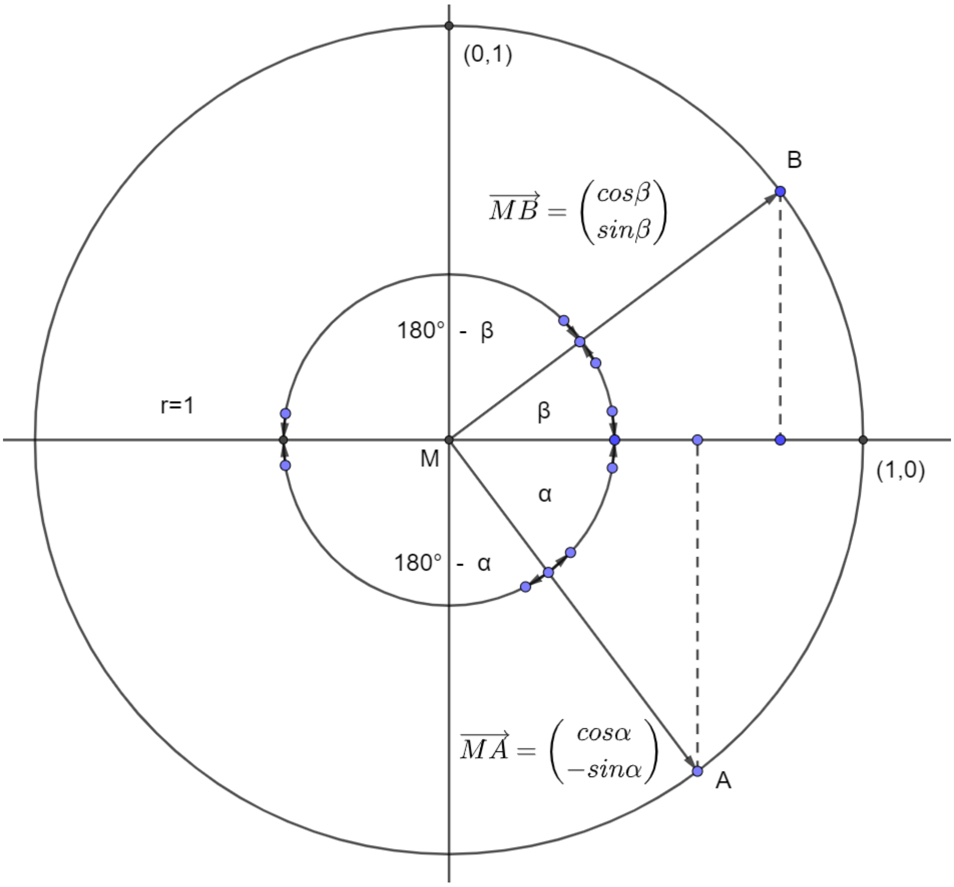
- Für die Katheten im rechtwinkligen Dreieck CMD gilt damit

$$\cos(\alpha+\beta) = |\overline{MD}| = a = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

und

$$\sin(\alpha+\beta) = |\overline{CD}| = b + f = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Herleitung 3: In der folgenden Skizze haben die Winkel α und β mit der x-Achse einen gemeinsamen Schenkel.



Der Winkel $\alpha + \beta$ kann nun als Winkel zwischen den Vektoren

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

gedeutet werden. Mit dem *Skalarprodukt* $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left|\overrightarrow{MA}\right|\left|\overrightarrow{MB}\right| \cos(\alpha + \beta)$ und $\left|\overrightarrow{MA}\right| = 1 = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ gewinnt man dann sofort das Additionstheorem für den Cosinus

$$\cos(\alpha + \beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Sei nun $\mathfrak{a} := \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{b} := \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix}$ und folgt für $\mathbf{0}° \leq \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{180}°$ mit dem Betrag des Vektorproduktes $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|\sin(\alpha + \beta)$ das Additionstheorem für den Sinus vermöge

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|} = \left|\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ -\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\\ 0\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{pmatrix}\right| = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

In der obigen Skizze liegt die Summe der beiden Winkel $\varphi = \pi - \alpha$ und $\psi = \pi - \beta$ zwischen $180°$ und $360°$ und und der Sinus von $\varphi + \psi$ ist damit negativ. Mit dem Vektorprodukt folgt

$$|\sin(\varphi+\psi)| = \frac{\left|\overrightarrow{MB}\times\overrightarrow{MA}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|\left|\overrightarrow{MA}\right|} = \left|\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ -\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\cos\beta\sin\alpha-\sin\beta\cos\alpha\end{pmatrix}\right| =$$

$$= |\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha| = |\cos(\pi-\psi)\sin(\pi-\varphi)+\sin(\pi-\psi)\cos(\pi-\varphi)|$$

$$= |-\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi| = |\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\cos\varphi|$$

und weiter

$$\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi.$$

Herleitung 4: Die Funktionen e^x, $\cos x$ und $\sin x$ lassen sich als Potenzreihen schreiben. Mit

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k,\quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\quad \text{und}\quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

folgert man die *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

Ersetzt man in dieser Formel x durch $\alpha+\beta$, so gilt einerseits

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

und andererseits

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha+i\beta} = e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)$$

Da zwei komplexe Zahlen dann und nur dann gleich sind, wenn sie in ihren Realteilen und Imaginärteilen übereinstimmen folgt

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\quad\text{und}\quad\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$$

Bemerkungen:

- Für die Prüfung reicht es, wenn Sie eine dieser Herleitungen beherrschen.
- Die Additionstheoreme

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}\quad\text{und}\quad\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

gewinnt man aus den Identitäten $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ und $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$. Die Vorgehensweise zur Herleitung zeigen die folgenden Zeilen am Beispiel der Tangensfunktion.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\frac{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

- Versuchen Sie doch bitte aus den Additionstheorem die folgenden Formeln zu gewinnen

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$$

und finden Sie damit auch einen weiteren Weg zur *Ceulenschen Verdoppelungsformel*.