

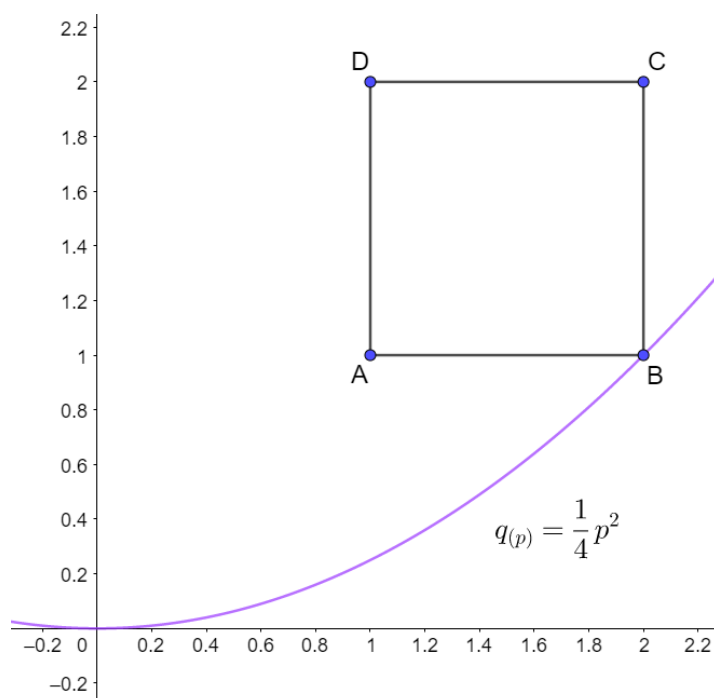
"Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen"

Text 04 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

Zunächst stelle ich hier einen Lösungsweg zur Aufgabe 3.1 vor.

Aufgabe 3.1: Wenn zwei Zahlen p und q zufällig und stochastisch unabhängig voneinander aus dem Intervall $[1, 2]$ gegeben werden, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit P , dass die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ reelle Lösungen besitzt?

Lösung: Die zwei Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ haben die Gestalt $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$. Dann und nur dann, wenn die *Diskriminante* $D = p^2 - 4q$ größer oder gleich Null ist besitzt diese Gleichung reelle Lösungen. Wenn die Diskriminante gleich Null ist, dann kann q in Abhängigkeit von p geschrieben werden. Der zugehörige Funktionsgraph ist die Parabel $q(p) = \frac{1}{4}p^2$ und in der Skizze hier zu sehen.



In dem Quadrat $ABCD$ finden sich alle Punkte (p, q) mit $1 \leq p \leq 2$ und $1 \leq q \leq 2$. Die Menge dieser Punkte veranschaulicht unsere Ergebnismenge Ω . Für die Punkte auf und unter der Parabel gilt dabei stets $D = p^2 - 4q \geq 0$. Also gibt es mit $B = (2, 1)$ nur einen Punkt in Ω für den die Diskriminante nicht negativ ist. Das Ereignis zufällig diesen Punkt zu wählen symbolisieren wir mit $\{B\}$ und das sichere Ereignis mit $\{\Omega\}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann

$$P = P(\{B\}) = \frac{\text{Flächeninhalt des Punktes } B}{\text{Flächeninhalt des Quadrates } ABCD} = \frac{0}{1} = 0.$$

Bemerkungen:

- Das Wort Diskriminante leitet sich von lateinisch *discriminare* (deutsch: unterscheiden) ab.
- Man beachte, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des Ereignisses $\{B\}$ zwar Null ist aber das Ereignis sehr wohl eintreffen kann.

- Hier kann man durch Ändern der Intervalle aus denen p und q gewählt werden beliebig viele Transferaufgaben für Übungen und Prüfungen erzeugen. Hätte man beispielsweise zugelassen, dass q aus dem Intervall $[0, 2]$ gewählt werden darf, dann wäre $P(\{B\}) = \frac{7}{24} = 0.291\bar{6}$. Überprüfen Sie bitte diese Lösung.

Das antike Griechenland darf man sicher als die Geburtsstätte unserer abendländischen Kultur, Demokratie und Wissenschaft bezeichnen. Hans Joachim Störig beschreibt dazu in seiner *'Kleinen Weltgeschichte der Philosophie'* [6] einige Bedingungen die die Geburt der Wissenschaften begünstigten. Hier eine leicht gekürzte Textstelle aus seinem Buch.

"Handel und Schifffahrt der Griechen erstreckten sich über die ganze mittelmeeerische Welt. Rund um dieses Meer, von der Straße von Gibraltar im Westen - der dunklen Pforte, die antike Schiffer selten zu durchschreiten wagten - bis hin zum Schwarzen Meer im Osten, hatten griechische Kolonisten sich niedergelassen. An den Küsten von Spanien, Südfrankreich, Nordafrika, vornehmlich aber in Unteritalien und Sizilien sowie an der dem griechischem Mutterland gegenüberliegenden und mit ihm durch die Kette der Ägäischen Inseln verbundenen Westküste Kleinasiens, bestanden griechische Städte. Im Verein mit dem Wohlstand, den Seefahrt und Handel in diese Küstenstädte brachten, erwuchsen die Grundlagen einer allgemeinen Bildung. Immer und überall in der Geschichte hat das Meer und die durch es vermittelte Berührung mit fremden Völkern und deren Denkweise auf das geistige Leben einen befördernden und befreienden Einfluß gehabt. [...] Die alten Kaufleute und Seefahrer sind die ersten Zweifler an den überlieferten Lebensformen, Denkweisen und religiösen Vorstellungen ihrer jeweiligen Heimat gewesen. Wo viele Glaubensbekenntnisse aufeinandertrafen, die alle die Wahrheit zu vertreten vorgaben, konnte leicht der Zweifel an allen sich breitmachen. Die Küstenstädte und Handelsplätze, zuerst an der griechisch besiedelten kleinasiatischen Küste, dann in Italien, später erst an der Küste des Mutterlandes - allen voran Athen - waren es daher, in denen sich philosophisches und wissenschaftliches Denken zuerst regte, gefördert auch durch freiheitliche und demokratische Verfassungen und die durch diese bedingte Entwicklung der freien öffentlichen Rede. Zu den günstigen geographischen und gesellschaftlichen Vorbedingungen trat der glückliche geschichtliche Umstand, dass die Griechen zwar in regen kulturellen Austausch mit den älteren Kulturen des Ostens traten, ja viele Grundlagen ihrer Zivilisation von dort entlehnten, in der entscheidenden Zeit aber von keinem der älteren Reiche des Ostens unterjocht wurden - so daß der griechische Geist die fremden Anregungen ohne Überfremdung nach seiner Eigenart verarbeiten konnte."

Bemerkungen:

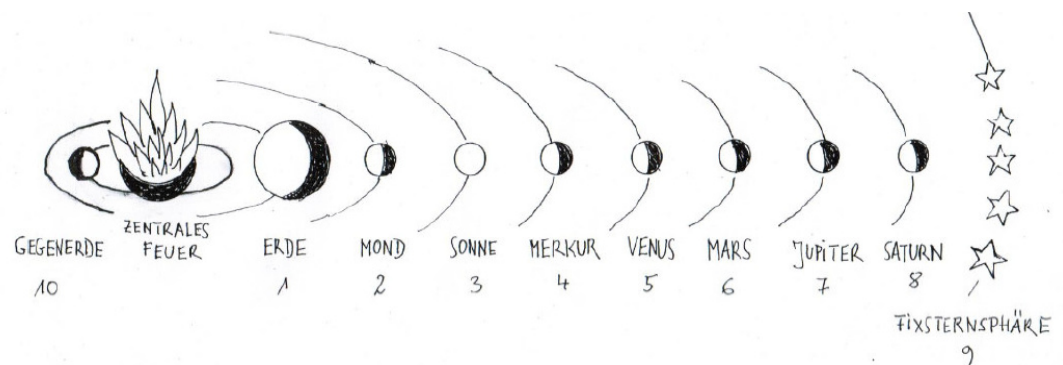
- Dr. Dr. Störig hatte diesen Text lange vor den letzten deutschen Rechtschreibereformen geschrieben.
- In dieser Zeit der Freiheit und Toleranz konnte der Staatsmann und Rechtsgelehrte Philólaos von Korinth (8. Jahrhundert v.Chr.) beispielsweise unbehelligt mit seinem Geliebten leben und der Philosoph und Pythagoreer Philólaos von Kroton (5. Jahrhundert v.Chr.) seine Ansichten zur Bewegung

der Himmelskörper lehren. Über die Beschaffenheit und Art dieser Bewegungen nachzudenken ermöglichte auch die griechische Sprache, die es erlaubte Verben zu substantivieren. Im Deutschen wird so aus dem Verb bewegen das Substantiv Bewegung und aus zählen wird der abstrakte Begriff Zahl.

- Die Freiheit war übrigens nur ein Privileg der Bürger der griechischen Stadtstaaten. Die schweren Arbeiten im Haus, auf dem Hof und den Feldern leisteten Sklaven. Bürger ohne Sklaven galten als arm. Wenn die Menschen in Deutschland ihren gegenwärtigen Lebensstandard ohne die Energieträger und Maschinen halten wollten, müsste jeder Bürger eine dreistellige Anzahl von bedürfnislosen Sklaven einsetzen.

Nun zum Weltbild des Pythagoreers Philólaos von Kroton. Erwin Schrödinger, dem die Physik die Schrödinger-Gleichung und mehr verdankt, erklärt in seinem Buch *'Die Natur und die Griechen'* [5] wie dieses Modell zu verstehen ist. Bevor ich ihn zitiere muss ich noch erwähnen, dass er als Österreicher nicht die deutsche Schreibweise für Pythagoreer nutzt.

"Die Pythagoräer wußten, daß die Erde eine Kugel ist, und waren vermutlich die ersten, die es wußten. Sie schlossen es höchstwahrscheinlich aus ihrem kreisförmigen Schatten auf dem Mond bei Mondfinsternissen,, den sie mehr oder minder korrekt interpretierten [...]. Ihr Modell des Planetensystems und der Sterne wird schematisch und summarisch durch die folgende Zeichnung wiedergegeben.



"Die Erdkugel umkreist in 24 Stunden ein ruhendes Zentrum, Z. F. (das Zentral-Feuer, nicht die Sonne), und wendet diesem Zentrum, so wie uns der Mond, immer die gleiche Seite zu, die nicht bewohnbar ist, weil zu heiß. Man stellte sich vor, daß 1. die Erde, 2. der Mond, 3. die Sonne, 4. bis 8. Planeten, 9. die Fixsterne je auf einer um das Z. F. zentrierten Sphäre sitzen, die um das Z. F. rotieren, jede mit einer ihr eigenen Umdrehungsperiode. [...]. Es gibt aber noch eine zehnte Sphäre oder zumindest einen zehnten Körper, die Gegenerde (Antichthon), bei dem nicht ganz klar ist, ob er dauernd in Konjunktion oder in Opposition zur Erde in Bezug auf das zentrale Feuer steht."

Man vermutet, dass die Gegenerde, die von der bewohnten Erdseite nie gesehen werden kann, möglicherweise zur Erklärung von Mondfinsternissen erdacht wurde. Überzeugender ist wohl der Ursprung im harmonikalen pythagoreischen Denken zu finden. H.J. Störig [6] bemerkt dazu:

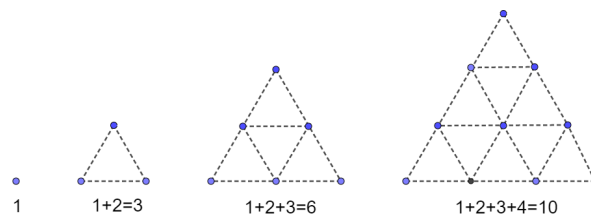
"In den Zahlen sieht die Pythagoreische Lehre das eigentliche Geheimnis und die

Bausteine der Welt. Jede der Grundzahlen von 1 bis 10 hatte ihre besondere Kraft und Bedeutung, allen voran die vollkommene und umfassende Zehn. Die Harmonie der Welt - Pythagoras war der erste, der die Welt einen 'Kosmos' nannte - beruht darauf, daß alles in ihr nach Zahlenverhältnissen geordnet ist. Das erweist sich für Pythagoras vor allem an der Musik. Er scheint der erste gewesen zu sein, der den harmonischen Zusammenklang der Töne und die Stufen der Tonleiter auf zahlenmäßige Verhältnisse zurückgeführt hat, nicht zwar auf die Verhältnisse der Schwingungszahl, aber der Länge der klingenden Saiten.

Die musikalische Harmonie findet Pythagoras im Aufbau des Weltalls wieder. Wie jeder bewegte Körper, das von dessen Größe und Schnelligkeit der Bewegung abhängt, so rufen die Himmelskörper beim Durchlaufen ihrer Bahn eine ununterbrochen klingende, nur von uns nicht wahrgenommene 'Sphärenmusik' hervor. Dieser schöne Gedanke einer (musikalisch verstandenen) Harmonie ist seit Pythagoras nicht nur als dichterisches Bild, sondern auch in der physikalischen und astronomischen Wissenschaft immer wieder aufgetaucht. Der große Kepler hat ihm ein Buch gewidmet. In neuester Zeit scheinen verwandte Gedanken erneut Bedeutung zu gewinnen."

Warum wurde die Zahl Zehn damals für so bedeutend gehalten. Rudolf Taschner schreibt in [7] ein ganzes Kapitel mit der Überschrift "Pythagoras: Zahl und Symbol". Dort finden sich die nachstehenden Informationen.

Die Pythagoreer untersuchten mit den Zahlen zusammenhängende geometrische Muster. Mit Steinchen lassen sich, wie die folgenden Darstellung zeigt, für die Zahlen 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... stets Dreiecke legen.



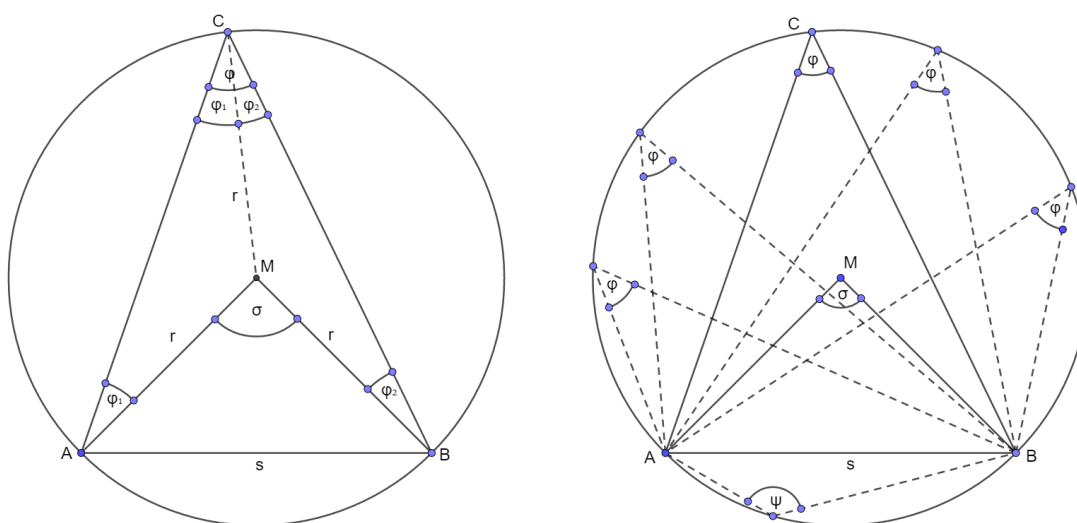
Die Zahlen $\sum_{k=1}^n k$ nennt man deshalb auch Dreieckszahlen. Die Eins galt in der Antike als Symbol des Unteilbaren bzw. des Göttlichen. Die Zwei symbolisierte den Gegensatz, Polarität, Trennung wie die Zweifheiten von Mann und Frau, von Gut und Böse, von Tag und Nacht.

Wörtlich schreibt R. Taschner: "*Die Drei steht für etwas Umfassendes: den Inhalt des Dreiecks, das die drei Eckpunkte einschließen. Mit diesem Umfassenden ist zugleich die Idee des Vollkommenen verwoben: In der Dreiheit von Mutter, Vater und Kind sah man von alters her die Urzelle des menschlichen Zusammenlebens.*" In der Folge der Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, 15, ... ist die Zehn mit $10 = 1 + 3 + 6$ die Summe ihrer Vorgänger. Diese Eigenschaft machte, dass man sie für vollkommen und umfassend hielt. Der Kosmos sollte auch diese mathematische Vollkommenheit besitzen und deshalb forderte man die Existenz einer Gegenerde. In der Physik und der Chemie wird diese Art zu Denken weiterhin gepflegt. Als man die Bausteine der Atomkerne, Protonen und Neutronen, entdeckte, sah man, dass die Lücken im Periodensystem der Elemente den Lücken in der Folge der Ordnungszahlen entsprachen und konnte so gezielt suchen. Ein naturwissenschaftliche Theorie bzw. naturwissenschaftliches Modell sollte,

so forderte man, mathematisch schön sein. Dieser Ansatz machte es möglich, dass bestimmte Quarks oder das Higgs-Boson (1964 gefordert und 2012 in CERN nachgewiesen) entdeckt wurden.

Die Auseinandersetzung mit der Kosmologie der Pythagoreer führte die mathematische Wissenschaft zu den Quadratwurzeln und Logarithmen. Neben den Pythagoreern ist auch Thales von Milet (zwischen dem 7. und 5. Jahrhundert v. Chr.), dem wir den Satz vom Thaleskreis verdanken, ein Vorsokratiker. Der folgende Peripheriewinkelsatz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Thales.

Peripheriewinkelsatz: Der Peripheriewinkel φ über einer Sehne in einem Kreis ist stets halb so groß wie der zugehörige Zentrumswinkel σ .

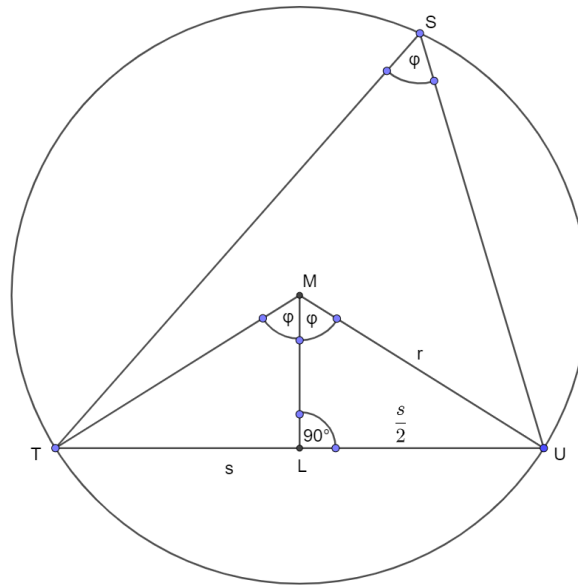


Aufgabe 4.1a: Zeigen Sie $\sigma = 2\varphi$.

Aufgabe 4.1b: Wie kann ψ in der rechten Figur durch σ darstellen?

Aufgabe 4.1c: Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Tangente an den Kreis im Punkt B und der Sehne s in Abhängigkeit von φ .

Vom Peripheriewinkelsatz ausgehend gewinnt man leicht den *Sinussatz*. Da ein beliebiges Dreieck stets einen Umkreis mit Mittelpunkt M und Radius r besitzt, kann man jeden der drei Winkel des Dreiecks als Peripheriewinkel über der gegenüberliegenden Dreiecksseite deuten. Betrachtet man in der folgenden Skizze das Dreieck STU und den Winkel φ bei S über der Sehne TU , dann zerlegt das Lot ML von M auf TU das Dreieck MTU in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.



Bezeichnet man die Länge der Sehne $\overline{TU}$ mit s , dann hat die Kathete $\overline{TU}$ im rechtwinkligen Dreieck MLU die Streckenlänge $\frac{s}{2}$. Nach dem Peripheriewinkelsatz ist $\overline{TU}$ zugleich die Gegenkathete von φ und mit der Hypotenuse r folgt $\sin \varphi = \frac{s}{2r}$ bzw. $\frac{s}{\sin \varphi} = 2r$. Damit gilt für ein Dreieck ABC der Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

Aufgabe 4.2: Was lehrt der *Kosinussatz* und wie kann man ihn herleiten?

Bemerkung:

- Studenten, die die Lehrbefähigung für Oberstufe (S2) anstreben, sollten die Lösungswege der Aufgaben 3.1 auch bei veränderten Intervallgrenzen in einer Prüfung wiedergeben können.
- Jeder sollte die Kosmologie der Pythagoreer beschreiben können.
- Jeder sollte die Aufgaben 4a bis 4c lösen können.
- Jeder sollte den Peripheriewinkelsatz und den Sinussatz herleiten können.

Literatur:

[3] *Elemente der Mathematik-Mittelstufe Band 2*, Rheidt, Wolf, Athen, Verlag Schroedel-Schöning, 1965, Paderborn

[5] *Die Natur und die Griechen*, Erwin Schrödinger, Paul Szolany Verlag, 1983, Wien/Hamburg

[6] *Kleine Weltgeschichte der Philosophie*, Hans Joachim Störig, Droemersch Verlagsanstalt Th. Knaur Nachf., München/Zürich, 1963

[7] *Der Zahlen gigantische Schatten*, Rudolf Taschner, Deutscher Taschenbuch Verlag, 2009, München