Ein Beitrag zur Approximation von Quadratwurzeln im Schulunterricht

Hans-Ulrich Brandenburger

16.11.2004

In den Lehrbüchern wird für die näherungsweise Berechnung von Quadratwurzeln nahezu ausnahmslos das Heron-Verfahren vorgestellt. In einigen Fällen begegnet man auch dem Bisektions-Verfahren. Hier soll nun ein weiteres Verfahren aufgezeigt werden, das meiner Einschätzung nach für den Schulunterricht besonders geeignet ist.

Die Rekursionsformel $w_{n+1} = \frac{a+w_n}{1+w_n}$

Eine schülergemäße Hinführung

Sei $a \in \mathbb{Q}$ und $a > 1$ sowie

$$w := \sqrt{a},$$

dann gilt

$$w^2 = a, \qquad \Rightarrow \qquad w^2 - 1 = a - 1, \qquad \Rightarrow \qquad (w-1)(w+1) = a - 1,$$

$$\Rightarrow \qquad w - 1 = \frac{a-1}{w+1}, \qquad \Rightarrow \qquad w = 1 + \frac{a-1}{1+w}, \qquad \Rightarrow \qquad w = \frac{a+w}{1+w}.$$

Schreibt man nun die vorletzte und letzte Gleichung versuchsweise als Rekursionsformeln

$$w_{n+1} = 1 + \frac{a-1}{1+w_n} \tag{1}$$

bzw.

$$w_{n+1} = \frac{a+w_n}{1+w_n}, \tag{2}$$

so kann man zunächst einmal z.B. für $a = 2$ probieren, ob die Folge der w_n zur $\sqrt{2}$ hin konvergiert. Sei noch der Startwert $w_1 = 1$ vorgegeben, dann gilt

$$\begin{array}{ccccc}
w_1 & = & 1 & = & 1.0 \\
w_2 & = & \frac{3}{2} & = & 1.5 \\
w_3 & = & \frac{7}{5} & = & 1.4 \\
w_4 & = & \frac{17}{12} & \approx & 1.41\overline{6} \\
w_5 & = & \frac{41}{29} & \approx & 1.4137931 \\
w_6 & = & \frac{99}{70} & \approx & 1.4142857 \\
w_7 & = & \frac{239}{169} & \approx & 1.4142012 \\
w_8 & = & \frac{577}{408} & \approx & 1.4142157 \\
w_9 & = & \frac{1393}{985} & \approx & 1.4142132 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\lim\limits_{n\to\infty} w_n & = & \sqrt{2} & \approx & 1.4142136
\end{array}$$

Das Heronverfahren und die Folge der w_n sowie einige vergleichende Beobachtungen

Das Heronverfahren wird traditionell geometrisch begründet, kann aber auch aus dem Newtonverfahren hergeleitet werden. Die zur Bestimmung von $\sqrt{a}$ zugehörige Rekursionsformel ist

$$h_{n+1} = \frac{1}{2}\left(h_n + \frac{a}{h_n}\right). \tag{3}$$

Starten wir nun z.B. die Berechnung von $\sqrt{3}$ für beide Folgen (w_n) und (h_n) mit $w_1 = h_1 = 1$ dann gilt

$$\begin{array}{ccccccccccc}
w_1 & = & 1 & = & 1.0 & & h_1 & = & 1 & = & 1.0 \\
w_2 & = & 2 & = & 2.0 & & h_2 & = & 2 & = & 2.0 \\
w_3 & = & \frac{5}{3} & = & 1.\overline{6} & & & & & & \\
w_4 & = & \frac{7}{4} & = & 1.75 & & h_3 & = & \frac{7}{4} & = & 1.75 \\
w_5 & = & \frac{19}{11} & = & 1.\overline{72} & & & & & & \\
w_6 & = & \frac{26}{15} & = & 1.7\overline{3} & & & & & & \\
w_7 & = & \frac{71}{41} & \approx & 1.7317073 & & & & & & \\
w_8 & = & \frac{97}{56} & \approx & 1.7321429 & & h_4 & = & \frac{97}{56} & \approx & 1.7321429 \\
w_9 & = & \frac{265}{153} & \approx & 1.7320261 & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & \\
w_{16} & = & \frac{18817}{10864} & \approx & 1.7320508 & & h_5 & = & \frac{18817}{10864} & \approx & 1.7320508 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\lim\limits_{n\to\infty} w_n & = & \sqrt{3} & \approx & 1.7320508 & & \lim\limits_{n\to\infty} h_n & = & \sqrt{3} & \approx & 1.7320508
\end{array}$$

Der Vergleich zeigt, dass die Folgenglieder der Folge (w_n) sich im Wechsel mal unter und mal über der $\sqrt{3}$ befinden. Die Heronfolge hingegen fällt ab dem Index 2 monoton zur Wurzel aus drei. Es ist sicherlich verblüffend, dass sich hier die Heronfolge als Teilfolge von (w_n) erweist. Dies gilt aber nur, wenn beide den gemeinsamen Starwert 1 haben, so kann man in der Tat zeigen:

Satz 1 *Starten wir das Heron-Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von $\sqrt{a}$ mit dem Startwert $h_1 = 1$, dann gilt*

$$\boxed{h_n = w_{2^{n-1}}}.$$

Einige Sätze, Beweise und Bemerkungen

Nachfolgend einige Sätze. Beweise sind hier nur dann angefügt, wenn sie meines

Erachtens auch von Schülern ohne größere Mühe geleistet werden könnten.

Satz 2 *Sei* $1 < a$ *und* $0 < w_n$*, dann gilt stets*

$$w_n < \sqrt{a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a} < w_{n+1} \tag{4}$$

und

$$\sqrt{a} < w_n \quad \Rightarrow \quad w_{n+1} < \sqrt{a} \tag{5}$$

Beweis: Der Beweis von Zeile (5) läuft analog dem folgenden Beweis von Zeile (4), nämlich

$$w_n < \sqrt{a}, \quad \Rightarrow \quad w_n(\sqrt{a} - 1) < \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1), \quad \Rightarrow \quad w_n\sqrt{a} - w_n < a - \sqrt{a},$$

$$\Rightarrow \quad w_n\sqrt{a} + \sqrt{a} < a + w_n, \quad \Rightarrow \quad (w_n + 1)\sqrt{a} < a + w_n, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a} < \frac{a + w_n}{1 + w_n},$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a} < w_{n+1}$$ **q.e.d.**

Satz 3 *Sei* $1 < a$ *und* $0 < w_n$*, dann gibt es ein* L *mit* $0 \leq L < 1$ und

$$|w_{n+2} - w_{n+1}| \leq L \cdot |w_{n+1} - w_n| \tag{6}$$

Beweis: Mit Zeile (2) gilt

$$w_{n+1} = \frac{a + w_n}{1 + w_n} \quad \text{und} \quad w_{n+2} = \frac{a + w_{n+1}}{1 + w_{n+1}} = \frac{a + \frac{a+w_n}{1+w_n}}{1 + \frac{a+w_n}{1+w_n}} = \frac{2a + (a+1)w_n}{1 + a + 2w_n}$$

und also folgt

$$0 \leq \frac{|w_{n+2} - w_{n+1}|}{|w_{n+1} - w_n|} = \frac{\left|\frac{2a+(a+1)w_n}{1+a+2w_n} - \frac{a+w_n}{1+w_n}\right|}{\left|\frac{a+w_n}{1+w_n} - w_n\right|} = \frac{\left|\frac{a(1-a)+(a-1)w_n^2}{(1+w_n)(1+2w_n+a)}\right|}{\left|\frac{a-w_n^2}{1+w_n}\right|}$$

$$= \left|\frac{a(1-a) + (a-1)w_n^2}{(1+w_n)(1+2w_n+a)}\right| \cdot \left|\frac{1 + w_n}{a - w_n^2}\right| = \frac{|w_n^2 - a| \cdot (a-1)}{a + 1 + 2w_n} \cdot \frac{1}{|a - w_n^2|}$$

$$= \frac{a-1}{a+1+2w_n} < \frac{a-1}{a+1} =: L < 1$$ **q.e.d.**

Die Sätze 1 und 2 zeigen zugleich, dass die Folgen (w_n) für alle positiven Startwerte in natürlicher Weise eine **Intervallschachtelung** liefern. Die Folgen (h_n) hingegen liefern **keine** Intervallschachtelung. Dennoch wird in manchen Lehrbüchern eine Intervallschachtelung im Zusammenhang mit dem Heronverfahren vorgestellt, die allerdings durch zwei Folgen erzeugt wird. Neben (h_n) wird die Folge $\left(\widetilde{h}_n\right)$ mit

$$\widetilde{h}_{n+1} = \frac{2a\widetilde{h}_n}{a + \widetilde{h}_n^2}$$

bemüht.

Die Rekursionsfolge (w_n) gestattet auch eine explizite Darstellung der w_n zu finden. So gilt wieder für den Startwert $w_1 = 1$

Satz 4

$$w_n = \frac{\sum_{k=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \binom{n}{2k} a^k}{\sum_{k=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \binom{n}{2k+1} a^k} \tag{7}$$

Bemerkung Die Anwendung des Satzes 4 kann man auch wie folgt interpretieren. Man wählt eine n-te Zeile im **Pascalschen-Dreieck** aus, z.B. ist dies für $n = 8$

$$1 \qquad 8 \qquad 28 \qquad 56 \qquad 70 \qquad 56 \qquad 28 \qquad 8 \qquad 1$$

und multipliziert von links oder rechts beginnend die ersten beiden Zahlen mit a^0, die nächsten beiden mit a^1 , dann mit a^2 u.s.w. zu

$$1a^0 \qquad 8a^0 \qquad 28a^1 \qquad 56a^1 \qquad 70a^2 \qquad 56a^2 \qquad 28a^3 \qquad 8a^3 \qquad 1a^4.$$

Die Summe der Produkte mit geradzahligen ”Binomialkoeffizienten-Nenner” schreibt man dann in den Zähler und die Produkte mit ungeradzahligen ”Binomialkoeffizienten-Nenner” in den Nenner eines Bruches

$$\frac{1 + 28a + 70a^2 + 28a^3 + 1a^4}{8 + 56a + 56a^2 + 8a^3}.$$

Für ein konkretes a z.B. $a = 3$ hat man dann mit

$$\frac{1 + 28 \cdot 3 + 70 \cdot 3^2 + 28 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^4}{8 + 56 \cdot 3 + 56 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^3} = \frac{97}{56} \approx 1.732\,14$$

einen rationalen Näherungswert für $\sqrt{3} \approx 1.732\,05$.

Die Sätze 1 und 4 regten an den nachfolgenden Satz zu formulieren.

Satz 5 *Starten wir das Heron-Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von $\sqrt{a}$ mit dem Startwert $h_1 = s$, dann gilt für $n \in \mathbb{N}$*

$$h_n = \frac{\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \binom{2^{n-1}}{2k} a^k s^{-2k}}{\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \binom{2^{n-1}}{2k+1} a^k s^{-(2k+1)}} \tag{8}$$

Die Zeile (1) zeigt noch einen Zusammenhang mit den **Kettenbrüchen** auf. So folgert man unmittelbar aus (1)

$$\sqrt{a} = 1 + \cfrac{a-1}{2 + \cfrac{a-1}{2 + \cfrac{a-1}{2 + \cfrac{a-1}{2 + \cfrac{a}{\ddots}}}}}. \tag{9}$$

Hier ist der Hinweis sicher sinnvoll, dass die Quadratwurzeln fast immer durch **Kettenbrüche** mit Zählern gleich 1 dargestellt werden, z.B.

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

die Zeile (9) aber eine andere Darstellung liefert, nämlich

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{\ddots}}}}}.$$