

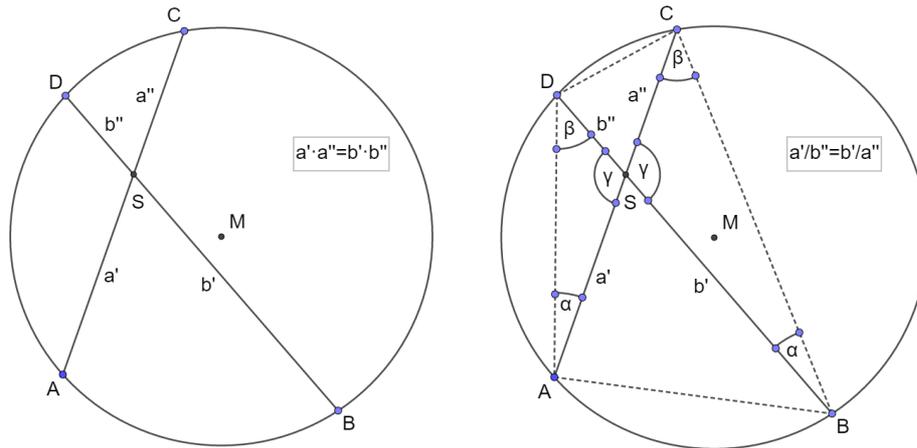
"Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen"

Text 06 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

Aufgabe 5.1: Der Peripheriewinkelsatz kombiniert mit einem der Ähnlichkeitssätze für Dreiecke macht es nun ganz leicht den Sehnensatz, den Sekantensatz und den Tangentensatz zu beweisen. Erproben Sie sich bitte daran.

- **Sehnensatz:** *Schneiden sich Sehnen eines gegebenen Kreises in einem Punkt S , so teilt der Schnittpunkt jede Sehne in zwei Abschnitte. Das Produkt der beiden Abschnitte einer Sehne ist dann stets konstant.*

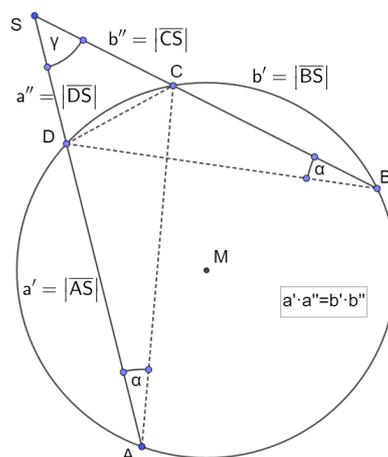
Dazu nachstehend das linke Bild.



Beweis: Das rechte Bild oben entspricht dem linken Bild zusätzlich versehen mit Hilfslinien und Winkeln. Die Peripheriewinkel über der Sehne \overline{CD} sind mit α und die über der Sehne \overline{AB} mit β gekennzeichnet. Die beiden Dreiecke ASD und BCS haben gleiche Winkel und sind somit ähnliche Dreiecke. Dann gilt

$$a'/b'' = b'/a'' \quad \text{bzw.} \quad a'a'' = b'b'' \quad \text{q.e.d.}$$

Bemerkung: Sekanten sind Geraden und ihre Streckenlänge ist immer unbegrenzt. Bei allen mir bekannten Formulierungen des Sekantensatzes steht aber das Wort Sekante nur für eine Teilstrecke derselben. So werden in der folgenden Skizze die Strecken \overline{SA} und \overline{SB} als Sekante und die Strecken \overline{SC} und \overline{SD} als äußere Sekantenabschnitte bezeichnet.

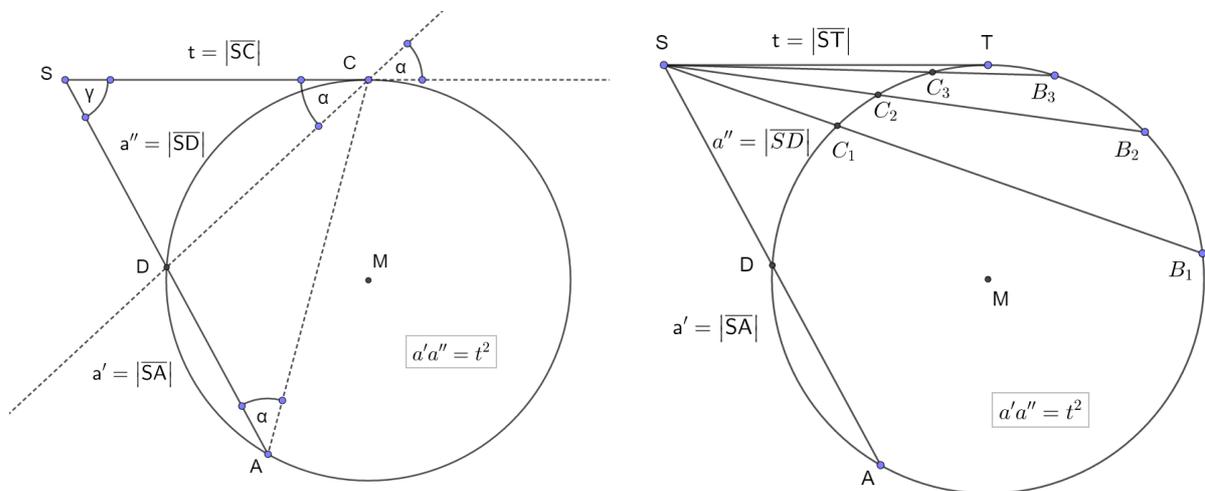


- **Sekantensatz:** Sei ein Kreis mit zwei sich im Punkt S schneidenden Sekanten vorgegeben, so trennt der Kreisrand von jeder Sekante einen äußeren Sekantenabschnitt ab. Das Produkt von dem äußeren Sekantenabschnitt und der Sekante ist dann stets konstant.

Beweis: Mit α sind die beiden Peripheriewinkel über der Sehne \overline{CD} benannt. Da die Dreiecke SAC und SDB mit α und γ zwei Winkel gemeinsam haben, sind sie einander ähnlich und es folgt

$$a'/b'' = b'/a'' \quad \text{bzw.} \quad a'a'' = b'b'' \quad \text{q.e.d.}$$

Bemerkung: Im Tangentensatz, der auch als Sekantentangentensatz bezeichnet wird, werden die Worte Sekante und Tangente gleichfalls mathematisch unkorrekt für Teilstrecken dieser Geraden verwendet. Dazu die nachstehende linke Skizze.



- **Tangentensatz:** Sei ein Kreis mit zwei sich im Punkt S schneidenden Geraden vorgegeben. Dabei soll die eine Gerade als Sekante den Kreis schneiden und die andere als Tangente den Kreis berühren. Das Produkt von dem äußeren Sekantenabschnitt und der Sekante ist dann gleich dem Quadrat der Tangentenlänge.

Beweis 1: Über der Sehne \overline{CD} ist der zum Punkt A gehörige Peripheriewinkel mit α bezeichnet. Die Lösung der Aufgabe 4.1c lehrte, dass der Winkel zwischen Sehne und Tangente gleich einem Peripheriewinkel über der Sehne ist. Also gilt $\angle SCA = \alpha$. Damit haben die Dreiecke SAC und SDC mit α und γ zwei Winkel gemeinsam. Aus der Ähnlichkeit beider Dreiecke folgt dann

$$a'/t = t/a'' \quad \text{bzw.} \quad a'a'' = t^2 \quad \text{q.e.d.}$$

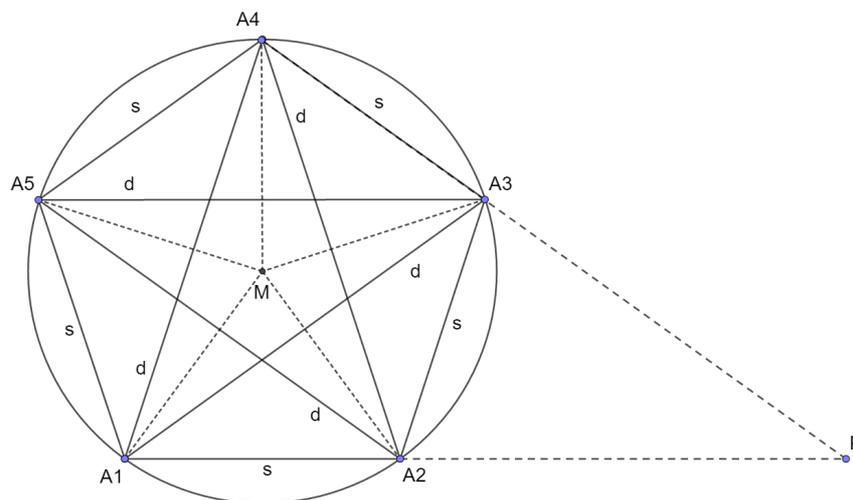
Beweis 2: Man nutzt den Sekantensatz für die oben im rechten Bild zu sehenden Sekanten. Es gilt dann

$$a'a'' = |\overline{SB_1}| \cdot |\overline{SC_1}| = |\overline{SB_2}| \cdot |\overline{SC_2}| = |\overline{SB_3}| \cdot |\overline{SC_3}| = \dots = |\overline{SB_n}| \cdot |\overline{SC_n}| = \dots$$

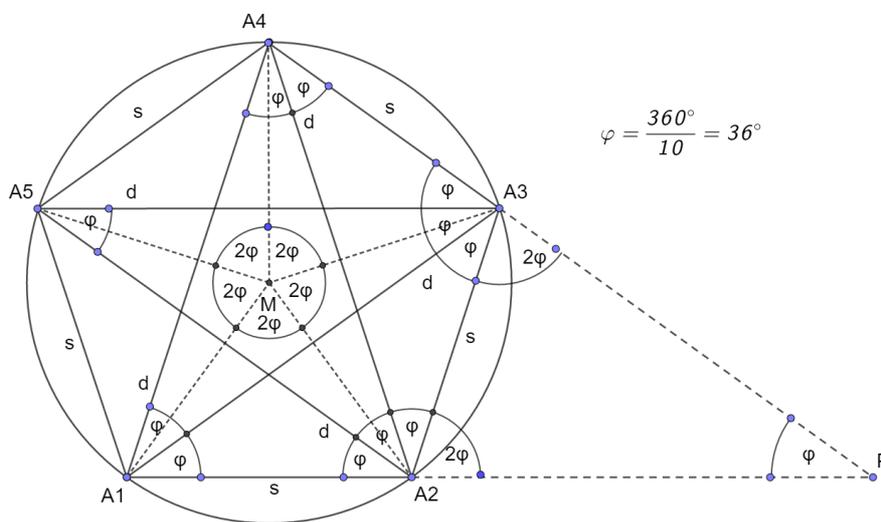
Wenn die Sekanten immer näher an den Tangentenberührungspunkt herangeführt werde, dann nähern sich die Streckenlängen $|\overline{SB_n}|$ und $|\overline{SC_n}|$ der Zahl t . So folgt

$$a'a'' = \lim_{n \rightarrow \infty} |\overline{SB_n}| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |\overline{SC_n}| = t \cdot t = t^2 \quad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 5.2a: Leiten Sie bitte aus der Skizze eines regelmäßigen Fünfecks die Gleichung $\frac{d}{s} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ her. Wenn Sie den zugehörigen Umkreis hinzudenken, dann sind die Seiten und Diagonalen Sehnen im Umkreis. Mit dem Peripheriewinkelsatz, einem der Ähnlichkeitssätze für Dreiecke und der folgenden Skizze sollten Sie die gesuchte Herleitung der Gleichung leicht gewinnen können. Dabei ist P der Schnittpunkt der Geraden A_1A_2 und A_3A_4 .



Lösung: Der Zentrumswinkel über jeder Seite s des Fünfecks beträgt $360^\circ/5 = 72^\circ$. Damit gilt für jeden Peripheriewinkel φ über s stets $\varphi = 72^\circ/2 = 36^\circ$. In der folgenden Skizze sind alle Zentrumswinkel 2φ und einige Peripheriewinkel φ kenntlich gemacht.



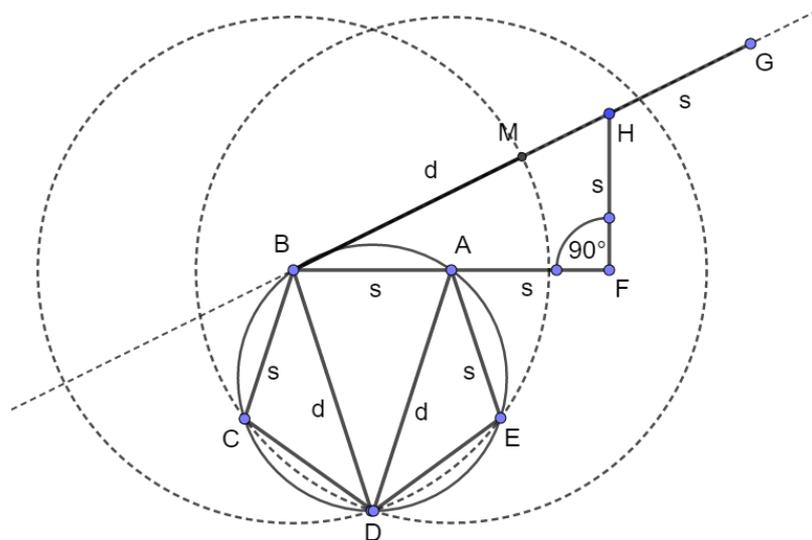
Bei dem Punkt A_2 sieht man von links her aufsteigend die drei Peripheriewinkel über den Seiten $\overline{A_1A_5}$, $\overline{A_5A_4}$ und $\overline{A_4A_3}$. Der Winkel $\angle PA_2A_3$ muss dann 2φ sein, denn $5\varphi = 180^\circ$. Analog gilt $\angle A_2A_3P = 2\varphi$ und mit der Winkelsumme im Dreieck folgt $\angle A_3PA_2 = \varphi$. Die beiden Dreiecke A_2PA_3 und A_1PA_4 haben gleiche Winkel und sind somit zwei ähnliche Dreiecke. Dann gilt

$$|\overline{A_4A_1}|/|\overline{A_1P}| = |\overline{A_3A_2}|/|\overline{A_2P}| \quad \text{bzw.} \quad d/(s+d) = s/d$$

Löst man die rechte Gleichung nach d hin auf, so erhält man mit $d = s\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$ die einzige positive Lösung. ■

Aufgabe 5.2b: Versuchen Sie aus der Gleichung $d = s\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ für eine vorgegebene Strecke s eine Konstruktionsanleitung für das zugehörige regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal herzuleiten.

Eine mögliche Lösung: Die folgende Skizze möge den Konstruktionsgedanken veranschaulichen.



Eine beliebige Strecke \overline{BA} mit der Länge s sei als eine Seite des zu konstruierenden regelmäßigen Fünfecks vorgegeben. Wir versuchen zunächst die Fünfeckdiagonale d zu gewinnen. Nun gilt $s\sqrt{5} = s\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{(1s)^2 + (2s)^2}$ und so kann man mit dem Satz von Pythagoras die Wurzel $\sqrt{5s^2} = s\sqrt{5}$ als die Hypotenusenlänge \overline{HB} eines rechtwinkligen Dreiecks $HB F$ mit den Kathetenlängen $1s$ und $2s$ verstehen. Die Hypotenuse wird um die Länge $1s$ verlängert zur Strecke \overline{BG} und dann wird die verlängerte Strecke halbiert. M ist der Mittelpunkt von \overline{BG} und die Strecke \overline{BM} hat dann die Länge $d = s\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Mit dem Radius d schlägt man einen Kreis um B und einen um A . Einer der zwei Kreisschnittpunkte ist hier mit D bezeichnet. Der Umkreis des Dreiecks BDA schneidet die beiden anderen Kreise in C und E . $ABCDE$ ist dann das gesuchte Fünfeck. ■

Aufgabe 5.3: Zeigen Sie bitte $\sqrt[4]{38} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: Wir nehmen an, $\sqrt[4]{38} \in \mathbb{Q}$. Dann muss es zwei teilerfremde natürliche Zahlen a und b geben mit $\frac{a}{b} = \sqrt[4]{38}$ bzw. $a^4 = 38b^4$. Zunächst betrachten wir den

Fall $b = 1$ Wegen $2^4 = 16 < a^4 = 38 < 3^4 = 81$ müsste a eine natürliche Zahl zwischen 2 und 3 sein. Das widerspricht der Beschaffenheit von \mathbb{N} .

Fall $b \neq 1$ Da $b > 1$ ist muss es wenigstens eine Primzahl p geben die b teilt. Damit teilt p das Produkt $38b^4$ und also auch a^4 . Jede Primzahl die a^4 teilt, teilt aber auch a . Folglich müssen a und b mit der Primzahl p einen gemeinsamen Teiler haben im Widerspruch zur vorausgesetzten Teilerfremdheit von a und b . Also gilt $\sqrt[4]{38} \notin \mathbb{Q}$. ■

Aufgabe 5.4: Versuchen Sie analog zu dem Heronverfahren eine Rekursionsformel zur Approximation von dritten Wurzeln zu gewinnen, indem Sie geeignete Quader in Richtung eines Würfels verändern.

Lösung: Als geeigneten Quader wählt man eine quadratische Säule. Bezeichnet man den Rauminhalt mit R und die Kantenlängen der quadratischen Grundfläche mit x_n , dann ist die Höhe der Säule gleich $\frac{R}{x_n^2}$. Auch hier hilft das arithmetische Mittel

$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{R}{x_n^2} \right)$ der Kantenlängen um längste Kanten kürzer und kürzeste Kanten länger zu machen.

Bemerkung: Da die $\sqrt[k]{R}$ mithilfe der Rekursionsformel $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1x_n + \frac{R}{x_n^1} \right)$ und die $\sqrt[3]{R}$ mit $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{R}{x_n^2} \right)$ approximiert werden können, haben die Schüler sehr schnell den Verdacht, dass $x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(3x_n + \frac{R}{x_n^3} \right)$ bzw. $x_{n+1} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{R}{x_n^{k-1}} \right)$ Näherungen für die $\sqrt[k]{R}$ bzw. $\sqrt[k]{R}$ liefert. Der Verdacht kann dann in der Mittelstufe durch Beispielrechnungen erhärtet und im Oberstufenunterricht vermöge des Newton-Verfahrens bestätigt werden. Setzt man nämlich $x = \sqrt[k]{R}$ und sucht nun mit Newton nach der Nullstelle der Funktion $f(x) = x^k - R$, dann erhält man mit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^k - R}{kx_n^{k-1}} = \frac{kx_n}{k} - \frac{x_n}{k} + \frac{x_n R}{kx_n^k} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{R}{x_n^{k-1}} \right)$$

die Bestätigung.

Anbei noch zwei Grundkursaufgaben zum Newton-Verfahren.

Aufgabe 6.1: In den betriebswirtschaftlichen Studiengängen betrachtet man Kostenfunktionen $K(x)$, Umsatzfunktionen $U(x)$ und Gewinnfunktionen $G(x)$ in Abhängigkeit der Produktionsmenge x . Dabei ist $G(x) := U(x) - K(x)$. Gilt $G(x) \geq 0$ für positive $x \in (a, b)$, so nennt man das Intervall (a, b) Gewinnzone. Seien nun $K(x) = x^3 - 11x^2 + 15x + 60$, $U(x) = 11x$ und $G(-2) = 0$ gegeben.

Aufgabe 6.1a: Bestimmen Sie bitte die Gewinnfunktion, die Gewinnzone und das mögliche Gewinnmaximum.

Aufgabe 6.1b: Als Betriebsoptimum x_o bezeichnet man diejenige Produktionsmenge, für die die Grenzkosten $\frac{dK(x)}{dx}$ gleich den Stückkosten $\frac{K(x)}{x}$ sind. Finden Sie hier einen Näherungswert für x_o .

Aufgabe 6.2: Versuchen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens Näherungen für den $\log_3 37$ zu gewinnen.

Bemerkungen:

- Jeder sollte die hier vorgestellten Lösungen, Herleitungen und Beweise beherrschen.
- Die Lösungen der hier gestellten Aufgaben werden im Text 07 vorgestellt.
- Beachtlich viele meiner Schüler landeten letztlich in betriebs- und volkswirtschaftlichen Studiengängen. Dies hatte mich bewogen einige Übungen zur Differentialrechnung auch aus diesem Bereich anzubieten.

Literatur:

[8] Heuser, Harro: Lehrbuch der Analysis Teil 1, Stuttgart, Teubner, 1993