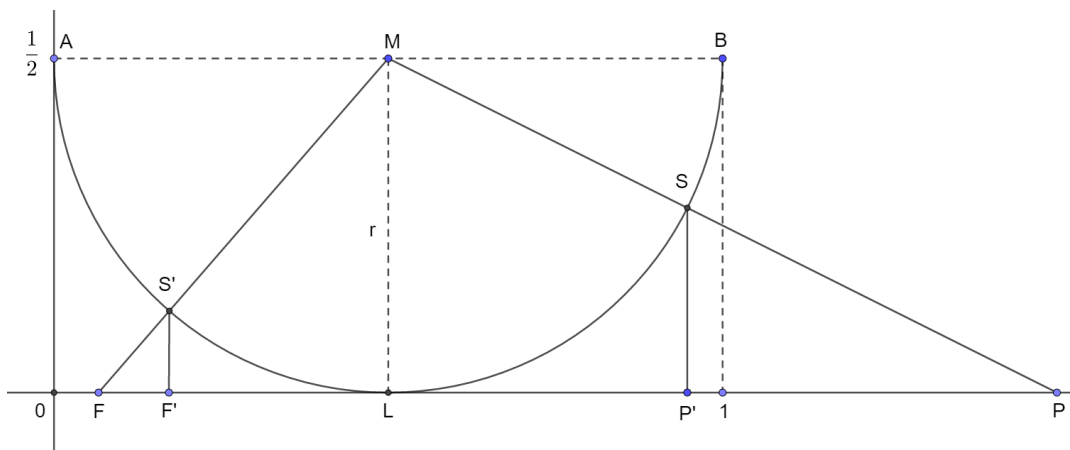


Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

Text 09 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

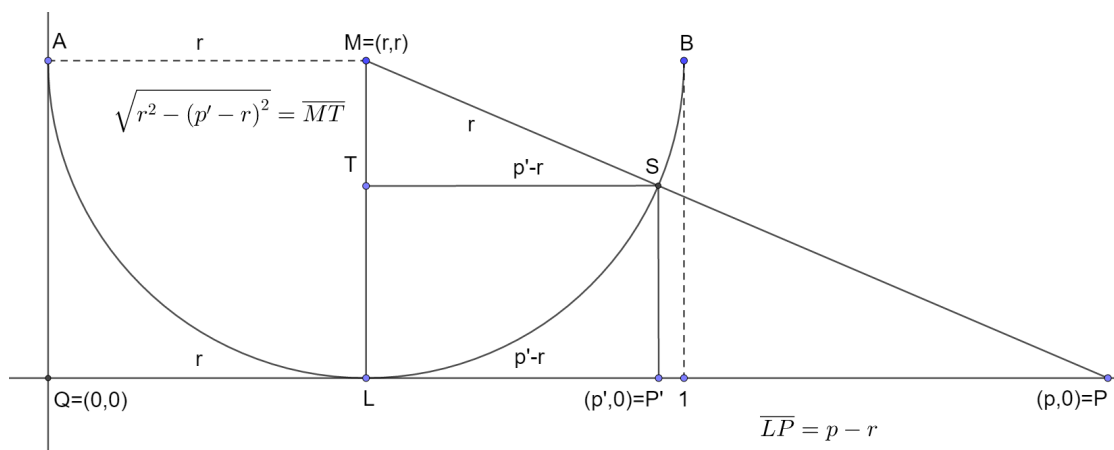
Aufgabe 8.1: Geben Sie bitte ein geometrisches Verfahren an, das von P' zu P führt.

Lösung: P' sei ein Punkt im Intervall $(0, 1)$. Die Lotrechte zur x -Achse durch P' schneidet den Halbkreisbogen um M in S . Die Gerade MS schneidet dann die x -Achse in P .



Aufgabe 8.2: Wenn P die Koordinatendarstellung $(p, 0)$ und P' die Koordinatendarstellung $(p', 0)$ hat, dann muss sich p' aus p rechnerisch ermitteln lassen. Finden Sie eine zugehörige Rechenvorschrift $p' = p'(p)$ und bestimmen Sie $p'(2)$.

Lösung: Die beiden rechtwinkligen Dreiecke MTS und MLP in der nachstehenden Skizze sind einander ähnlich, da die Strecken $\overline{TS}$ und $\overline{LP}$ parallel laufen.



Folglich gilt

$$\frac{\overline{LP}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{TS}}{\overline{TM}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p-r}{r} = \frac{p'-r}{\sqrt{r^2 - (p'-r)^2}} \quad (9.1)$$

Multipliziert man die quadrierte Gleichung mit dem Produkt der Nenner, so erhält man über

$$(p-r)^2 (r^2 - (p'-r)^2) = r^2 (p'-r)^2 \quad \text{und} \quad (p^2 - 2pr + 2r^2)(p')^2 - 2r(p^2 - 2pr + 2r^2)p' + r^4 = 0$$

die einfache quadratische Gleichung

$$(p')^2 - 2rp' + \frac{r^4}{(p-r)^2 + r^2} = 0$$

mit den zwei Lösungen

$$p'_1 = r + \frac{r(p-r)}{\sqrt{(p-r)^2 + r^2}} \quad \text{und} \quad p'_2 = r - \frac{r(p-r)}{\sqrt{(p-r)^2 + r^2}}$$

Allerdings ist nur p'_1 eine Lösung der ursprünglichen Wurzelgleichung. Ersetzt man nun noch r durch $\frac{1}{2}$, so erhalten wir die gesuchte Rechenvorschrift

$$p'_{(p)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2p-1}{\sqrt{(2p-1)^2 + 1}} \right)$$

und damit

$$p'_{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{20} \sqrt{10} \approx 0.974341649.$$

Bemerkung: Der zeitaufwendige Rechenweg nach der Zeile (9.1) kann kein Prüfungsgegenstand sein. Es ist also ausreichend einen Ansatz bis zur dieser Zeile (9.1) oder einen vergleichbaren Weg zu kennen.

Zunächst sei an die geometrischen Summen und Reihen erinnert, da wir diese Begriffe im Folgenden benötigen. Die geometrische Summe und die geometrische Reihe haben die Gestalt $\sum_{k=0}^n q^k$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$. Für die **geometrische Summe** gilt mit $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

$$\begin{aligned} \text{denn } (1-q) \sum_{k=0}^n q^k &= \sum_{k=0}^n q^k - q \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^n q^{k+1} \\ &= q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n - (q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}) \\ &= q^0 + (q^1 - q^1) + (q^2 - q^2) + \dots + (q^n - q^n) - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

Mit $|q| < 1$ folgt dann für die **geometrische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},$$

$$\text{denn } \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Folgerung: Mit $q^0 = 1$ folgt $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) - 1 = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}$ und man erhält für $|q| < 1$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$$

Nachfolgend einige Gedanken zur Gleichung

$$|\wp(M)| = 2^{|M|}$$

Für Mengen M mit endlich vielen Elementen gilt der

Satz: Ist M eine Menge mit $|M| \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M , dann gilt

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$$

Beweis: Wir führen einen Induktionsbeweis.

Induktionsanfang: Die Mächtigkeit der leeren Menge ist Null, in Zeichen $|\emptyset| = 0$ oder $|\{\ \ \}| = 0$. Die Menge aller Teilmengen der leeren Menge enthält mit $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ genau ein Element. Folglich gilt $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0 = 2^{|\emptyset|}$.

Induktionsschritt von n zu $n+1$: Wir dürfen annehmen, dass für die Potenzmenge einer Menge M mit n Elementen gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$. Fügt man der Menge M ein zusätzliches Element hinzu, dann ist für die so erweiterte Menge $\widetilde{M}$ jede Teilmenge T von M auch Teilmenge von $\widetilde{M}$. Da man nun jeder Teilmenge T das zusätzliche Element auch hinzufügen darf, ist die Anzahl aller Teilmengen von $\widetilde{M}$ gleich $2^n + 2^n$. Mit $|\widetilde{M}| = n + 1$ gilt also $|\mathcal{P}(\widetilde{M})| = 2^n + 2^n = 2^{n+1} = 2^{|\widetilde{M}|}$. ■

Es soll nun gezeigt werden, dass die Menge der reellen Zahlen und die Potenzmenge der natürlichen Zahlen gleichmächtig sind, also

$$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$

Da wir bereits die Gleichmächtigkeit der Menge der reellen Zahlen und die der reellen Zahlen im Intervall $\mathbb{I} := (0, 1)$ gezeigt hatten, reicht es nun aus zu zeigen, dass $\mathbb{I}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind.

Beweis: Die Beweisidee besteht darin, dass man jeder Teilmenge T von $\mathbb{N}$ genau eine und nur eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 zuordnet, indem die Elemente der Mengen als Exponenten von Potenzen mit der Basis $\frac{1}{2}$ geschrieben werden. So kann z. B. die Menge $\mathbb{G}$ der geraden Zahlen mit $\mathbb{G} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ der Dualzahl $[0.\overline{01}]_2$ und wegen

$$\begin{aligned} [0.\overline{01}]_2 &= [0.010101\dots]_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

der reellen Zahl $\frac{1}{3}$ eineindeutig zugeordnet werden. Leider geht das nicht mit allen Mengen so schön. Wie bei den Dezimalzahlen $1.03 = 1.02\overline{9}$ gilt, so gibt es auch bei den Dualzahlen einige, die zwei Darstellungen erlauben. Die Zahlen

$$a = [0.011001]_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{25}{64} \text{ und}$$

$$b = [0.011000\overline{1}]_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \sum_{k=7}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{25}{64} \text{ sind gleich, aber die zugehörigen}$$

Mengen $A = \{2, 3, 6\}$ und $B = \{2, 3, 7, 8, 9, 10, \dots\}$ sind ungleich. Die zweifache Schreibweise einer Dualzahl ist aber nur dann möglich, wenn eine der beiden

Notationen eine nur endliche Anzahl von Einsen hinter dem Komma besitzt. Damit

können sie stets als Summe von endlich vielen Potenzen $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ geschrieben werden

und diese Summe ist dann eine rationale Zahl. Bei den überabzählbar vielen irrationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ können wir allerdings jeder Zahl eineindeutig eine Menge $T \subset \mathbb{N}$

zuordnen. Damit gibt es überabzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ und noch eine abzählbare Menge hinzu. Vereinigt ist die Gesamtmenge überabzählbar. In Zeichen wird dies häufig auch in der Form $|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|}$ dargestellt.■

Bemerkung: Die Februarausgabe 2021 der Spektrum der Wissenschaft ging im Hauptbeitrag der Frage nach, ob es eine Menge M gibt mit

$$|\mathbb{N}| < |M| < |\mathbb{R}|.$$

Die Annahme, dass es eine solche Menge M nicht gibt, ist die berühmte Kontinuumshypothese. Auch in der Januarausgabe 2022 sind die neuesten Bemühungen um den Nachweis einer solchen Menge M Titelthema. Die Lektüre bietet die Möglichkeit einen Blick auf einen bedeutenden Teil aktueller mathematischer Forschung zu werfen.

Nun fünf sehr einfache Übungen zu den Grundbegriffen der Stochastik:

Aufgabe 9.1: Wenn ein idealer regelmäßiger Tetraeder als Würfel genutzt wird, gilt die Fläche als geworfen, die auf dem Boden zu liegen kommt. Die vier Flächen eines solchen Tetraeders seien nun mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 beschriftet. Wir betrachten nun das Zufallsexperiment 'Einmaliges Werfen dieses Tetraeders'.

9.1a: Notieren Sie bitte die zugehörige **Ergebnismenge** Ω für dieses Zufallsexperiment.

9.1b: Notieren Sie bitte auch die Menge $\mathcal{P}$ aller denkbaren **Ereignisse** E für dieses Zufallsexperiment...

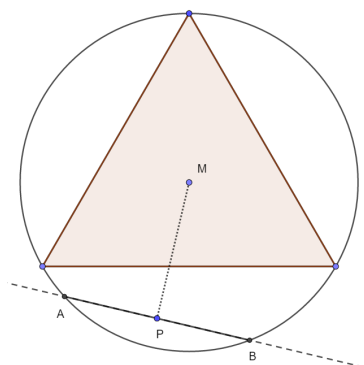
9.1c: ...und die zugehörigen **Wahrscheinlichkeiten** dieser Ereignisse.

9.1d: Wenn man nun anstelle des idealen regelmäßigen Tetraeders einen unregelmäßigen Tetraeder zum Würfeln genutzt hätte, was hätte man dann in den Aufgaben 9.1a bis 9.1c als Lösung notieren müssen, wenn die Wahrscheinlichkeit p_n die Zahl n zu werfen mit $p_n = \frac{2n-1}{16}$ bekannt wäre.

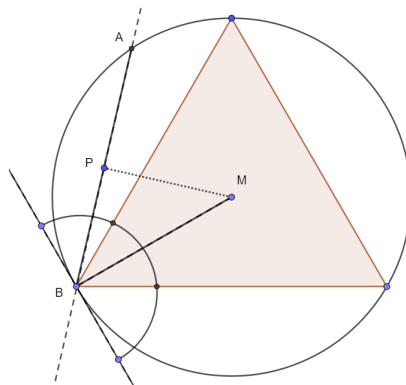
9.1e: Notieren Sie bitte alle Ereignisse der σ -**Algebra** $\mathcal{A}$ über unserer Ergebnismenge Ω , die mit $\{1\}$ und $\{2\}$ genau nur zwei einelementige Ereignisse enthält.

Eine einfache Frage liefert widersprüchliche Antworten:

Sei ein gleichseitiges Dreieck mit seinem Umkreis und dem Umkreismittelpunkt M gegeben. Zu jedem Punkt P im Inneren des Kreises, der nicht der Umkreismittelpunkt ist, gibt es dann genau eine Sehne $\overline{AB}$, deren Sehnenmittelpunkt P ist. Wird durch ein Zufallsexperiment ein Punkt P bestimmt, dann soll die Wahrscheinlichkeit p ermittelt werden, dass die zugehörige Sehne $\overline{AB}$ länger ist als eine Seite des Dreiecks?

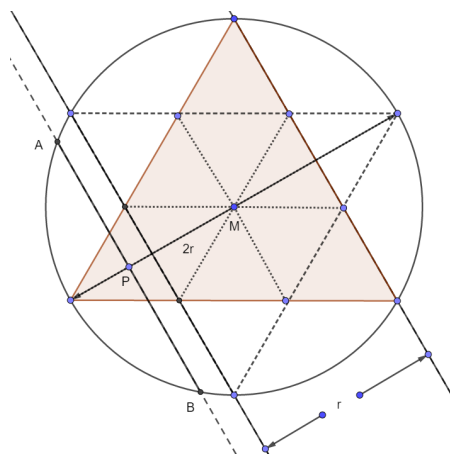


Lösungsweg 1: Da man sich das gleichseitige Dreieck beliebig im Kreis gedreht denken kann, wählt man die Drehung so, dass die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit leicht fällt.



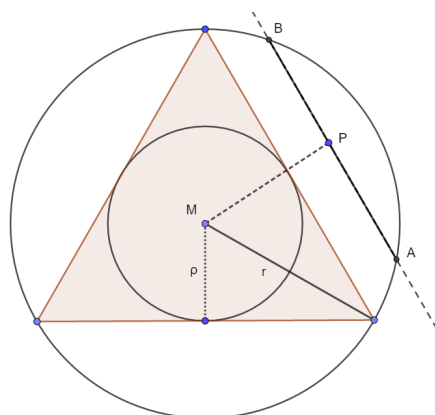
Mit den drei 60° -Winkeln im Punkt B folgt $p_1 = \frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{3}$

Lösungsweg 2:



Die Sehne $\overline{AB}$ ist kürzer als eine Dreiecksseite, wenn sie parallel zu einer Dreiecksseite verläuft und den kleineren Kreisbogen über dieser Seite schneidet. Damit gilt $p_2 = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$

Lösungsweg 3:



Für jeden Punkt P im Inneren des Inkreises mit Radius ρ ist $\overline{AB}$ länger als eine Dreiecksseite. Also gilt mit $r = 2\rho$ die Lösung $p_3 = \frac{\pi\rho^2}{\pi r^2} = \frac{\rho^2}{(2\rho)^2} = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 9.2: Welche der Lösungen ist ihrer Meinung nach richtig?

Bemerkung: Die grundlegenden Gedanken der hier vorgestellten Beweise und die letzten drei Lösungswege sollte man stets wiedergeben können.

Ich wünsche Ihnen ein besonders gutes und sehr erfolgreiches neues Jahr

$$(2 + 0 + 2 + 3) \times (((202 \times 3) - (20 \times 23)) \times (2 + 0 \times 23) - (2 \times 0 \times 2 + 3))$$