

Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

Text 10a zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

Aufgabe 9.1: Wenn ein idealer regelmäßiger Tetraeder als Würfel genutzt wird, gilt die Fläche als geworfen, die auf dem Boden zu liegen kommt. Die vier Flächen eines solchen Tetraeders seien nun mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 beschriftet. Wir betrachten das Zufallsexperiment *'Einmaliges Werfen dieses Tetraeders'*.

9.1a: Notieren Sie bitte die zugehörige **Ergebnismenge** Ω für dieses Zufallsexperiment.

Lösung:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

9.1b: Notieren Sie bitte auch die Menge $\mathcal{P}$ aller denkbaren **Ereignisse** E für dieses Zufallsexperiment...

Lösung:

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{cccccc} & & & \emptyset & & \\ & \{1\} & \{2\} & & \{3\} & \{4\} \\ \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{1, 4\} & & \{2, 3\} & \{2, 4\} & \{3, 4\} \\ & \{2, 3, 4\} & \{1, 3, 4\} & & \{1, 2, 4\} & \{1, 2, 3\} \\ & & & \Omega & & \end{array} \right\}$$

Das Ereignis man würfelt eine 3 wird durch die Menge $\{3\}$ dargestellt. Das Ereignis man würfelt eine 3 oder eine 4 wird durch die Menge $\{3, 4\}$ dargestellt.

9.1c: ...und die zugehörigen **Wahrscheinlichkeiten** dieser Ereignisse.

Lösung: Die folgende Anordnung der Wahrscheinlichkeiten entspricht den oben dargestellten Ereignissen. So ist z. B. $p(\{2, 4\}) = \frac{|\{2, 4\}|}{|\{1, 2, 3, 4\}|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Die Laplace-Wahrscheinlichkeiten folgen aus der Definition $p(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

9.1d: Wenn man nun anstelle des idealen regelmäßigen Tetraeders einen besonderen unregelmäßigen Tetraeder zum Würfeln genutzt hätte, was hätte man dann in den Aufgaben 9.1a bis 9.1c als Lösung notieren müssen, wenn die Wahrscheinlichkeit p_n die Zahl n zu werfen mit

$$p_n := \frac{2n-1}{16}$$

bekannt wäre.

Lösung: Die Lösungen von **1a** und **1b** gelten auch hier unverändert. Die definierte Wahrscheinlichkeit p_n liefert aber dann diese Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \frac{0}{16} & & & & 0 \\
& \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & \\
\frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{8}{16} & & \frac{8}{16} & \frac{10}{16} & \frac{12}{16} \\
& \frac{15}{16} & \frac{13}{16} & & \frac{11}{16} & \frac{9}{16} & \\
& & \frac{16}{16} & & & & 1
\end{array}
\quad \text{bzw.} \quad
\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & \\
& \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\
& \frac{15}{16} & \frac{13}{16} & & \frac{11}{16} & \frac{9}{16} & \\
& & & & & &
\end{array}$$

9.1e: Notieren Sie bitte alle Ereignisse der σ -**Algebra** $\mathcal{A}$ über unserer Ergebnismenge Ω , die mit $\{1\}$ und $\{2\}$ genau nur zwei einelementige Ereignisse enthält.

Lösung:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{ccc} \emptyset & & \\ \{1\} & \{3,4\} & \{2\} \\ \{2,3,4\} & \{1,2\} & \{1,3,4\} \\ \Omega & & \end{array} \right\}$$

Beachten Sie, dass sich aus den Ereignissen von $\mathcal{A}$ bezüglich der Operationen Vereinigen, Schneiden und Komplementärmengenbildung keine neuen Mengen bzw. Ereignisse erzeugen lassen. $\mathcal{A}$ ist also bezüglich dieser Operationen abgeschlossen.

Bemerkungen:

Die Lösung der letzten Aufgabe lässt sich leicht für alle Mengen Ω mit $|\Omega| \geq 3$ verallgemeinern. Solch eine Menge kann stets in 3 nichtleere und paarweise disjunkte Teilmengen A , B und C zerlegt werden mit $A \cup B \cup C = \Omega$. Mit

$$\bar{A} = B \cup C, \quad \bar{B} = C \cup A \quad \text{und} \quad \bar{C} = A \cup B$$

gestattet die zugehörige σ -**Algebra** $\mathcal{A}$ über Ω die Darstellungen

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{ccc} \emptyset & & \\ A & B & C \\ B \cup C & C \cup A & A \cup B \\ \Omega & & \end{array} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{ccc} \emptyset & & \\ A & B & C \\ \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} \\ \Omega & & \end{array} \right\}$$

Beispiel: Wählt man für $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ die Zerlegung $\{\{1,2,3\}, \{4\}, \{5\}\}$, dann ist

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{ccc} \emptyset & & \\ \{1,2,3\} & \{4\} & \{5\} \\ \{4,5\} & \{1,2,3,5\} & \{1,2,3,4\} \\ \Omega & & \end{array} \right\}$$

die zugehörige σ -**Algebra**.

Wenn man nun anstelle der Zerlegung $\{\{1,2,3\}, \{4\}, \{5\}\}$ die Menge $M := \{\{1,2,3\}, \{3,4\}, \{5\}\}$ über $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ betrachtet, dann ist M wegen $\{1,2,3\} \cap \{3,4\} = \{3\} \neq \emptyset$ keine Zerlegung von Ω . Dennoch sollte man die Frage nach der zugehörigen kleinsten σ -**Algebra** über M beantworten können. Bevor Sie den folgenden Lösungsweg betrachten, versuchen Sie doch bitte einen eigenen Weg zur Antwort hin zu finden.

Lösungsweg: Mit $\{5\}$, $\{1,2,3\} \cap \{3,4\} = \{3\}$ und $\overline{\{1,2,3\} \cup \{5\}} = \{4\}$ haben wir drei einelementige Mengen und mit $\{1,2\}$ eine zweielementige Menge. Die letztere Menge lässt sich nicht weiter zerlegen, da in allen Mengen die wir durch Vereinigen, Schneiden und Komplementärmengenbildung erzeugen können die Elemente 1 und 2 stets gemeinsam auftreten. Nun ist $Z := \{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ sicher eine Zerlegung von $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ in vier paarweise disjunkte Teilmengen $A = \{1,2\}$, $B = \{3\}$, $C = \{4\}$ und $D = \{5\}$.

Wenn man eine beliebige Menge Ω mit $|\Omega| \geq 4$ in vier nichtleere und paarweise disjunkte Teilmengen A , B , C und D zerlegt, hat die zugehörige σ -**Algebra** $\mathcal{A}$ die Gestalt

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & & \emptyset & & & \\ & A & B & & C & D & \\ A \cup B & A \cup C & A \cup D & & B \cup C & B \cup D & C \cup D \\ & \bar{A} & \bar{B} & & \bar{C} & \bar{D} & \\ & & & \Omega & & & \end{array} \right\}$$

Für die Komplementärmengen von A , B , C und D gilt nämlich

$$\bar{A} = B \cup C \cup D \quad \bar{B} = C \cup D \cup A \quad \bar{C} = D \cup A \cup B \quad \bar{D} = A \cup B \cup C$$

Für unseren speziellen Fall ist dann

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & & \emptyset & & & \\ & \{1,2\} & \{3\} & & \{4\} & \{5\} & \\ \{1,2,3\} & \{1,2,4\} & \{1,2,5\} & & \{3,4\} & \{3,5\} & \{4,5\} \\ & \{3,4,5\} & \{1,2,4,5\} & & \{1,2,3,5\} & \{1,2,3,4\} & \\ & & & \Omega & & & \end{array} \right\}$$

Ergänzende Anmerkungen zu Aufgaben 8.1 und 8.2:

In der Vorlesung wurde die Frage gestellt, ob auch andere Kurven anstelle des Halbkreises gewählt werden können, um geometrische und arithmetische Herleitungen für die gewünschte Gleichmächtigkeit von $\mathbb{R}$ und dem Intervall $(0,1)$ zu zeitigen. Die nachfolgende Skizze zeigt hier beispielhaft zwei weitere aus der unendlichen Fülle denkbarer Kurven. Da ist zunächst die Parabel

$$y = 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

zu nennen, die durch die Punkte Q, D, L und C verläuft und in S_1 und Q von der Geraden MP mit

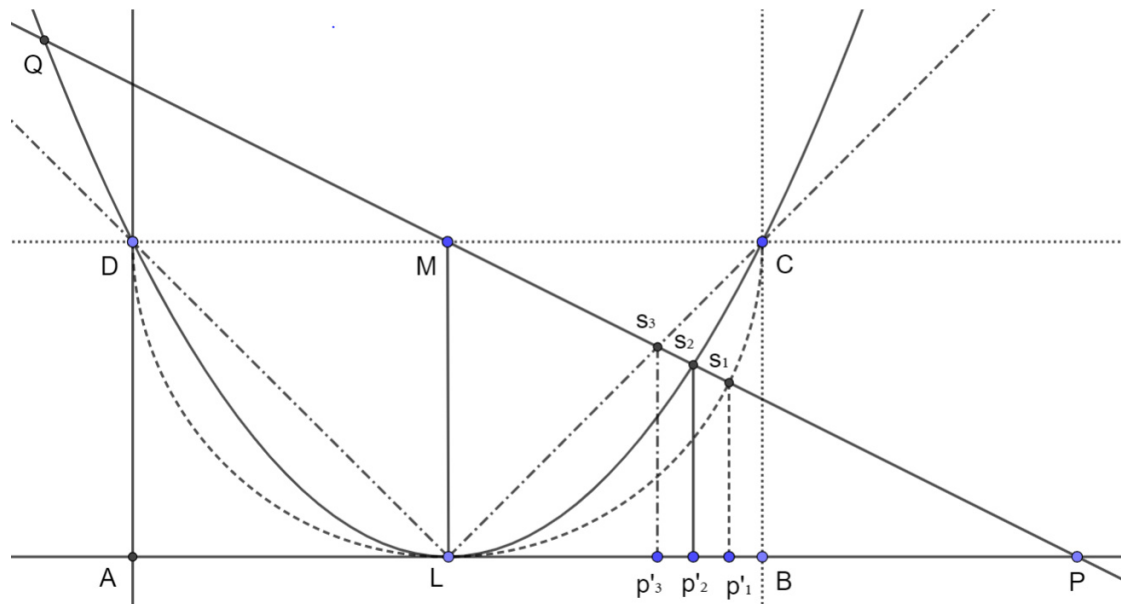
$$y = \frac{-1}{2p-1}(x-p)$$

geschnitten wird. Die x-Koordinate des Schnittpunktes

$$S_2(p) = \left(\frac{8p-6+2\sqrt{16p^2-16p+5}}{2(8p-4)}, \frac{8p^2-8p+3-\sqrt{16p^2-16p+5}}{4(2p-1)^2} \right)$$

liefert den Bildpunkt P' von P. Übrigens gilt dann für den Punkt Q

$$Q(p) = \left(\frac{8p - 6 - 2\sqrt{16p^2 - 16p + 5}}{2(8p - 4)}, \frac{8p^2 - 8p + 3 + \sqrt{16p^2 - 16p + 5}}{4(2p - 1)^2} \right).$$



Die von $L = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ausgehenden Strahlen in Punktstrichdarstellung durch C und D genügen für geeignete x den Gleichungen

$$y_{LD} = -x + \frac{1}{2} \quad y_{LC} = x - \frac{1}{2}$$

und für den Punkt S_2 gilt dann

$$S_2(p) = \left(1 - \frac{1}{4p}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4p} \right).$$

Für die Zeichnung hatte ich $p = \frac{3}{2}$ gewählt. Also gilt dort

$$p'_{(1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\sqrt{5} \approx 0.947214$$

$$p'_{(2)} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} \approx 0.890388$$

$$p'_{(3)} = \frac{5}{6} \approx 0.8\bar{3}$$