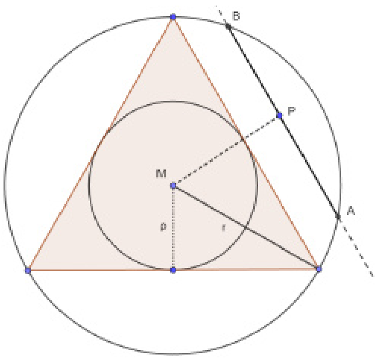
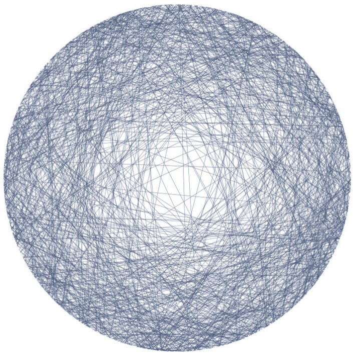
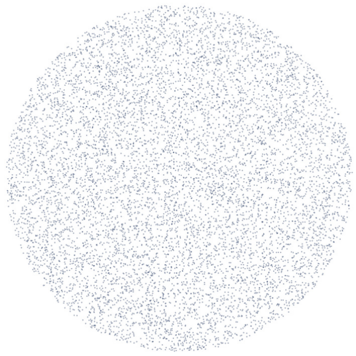
Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

Text 10c zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

Bilder zum Lösungsweg 3:







Hier sind die Sehnenmittelpunkte offensichtlich gleichverteilt, die Sehnen aber erkennbar nicht. Es ist in der Stochastik besonders wichtig, auf eine sehr präzise Aufgabenformulierung zu achten. In den Schulbüchern finden sich aber immer wieder Aufgaben, die nicht ausreichend klar ausformuliert wurden und so den Schülern und Lehrern erhebliche Schwierigkeiten bereiten.

Einige Bemerkungen zum pascalschen Dreieck und den Binomialkoeffizienten

Den Schülern begegnet das pascalsche Dreieck wohl erstmals in der Mittelstufe beim Ausmultiplizieren von Potenzen der Form $(a+b)^n$. In der Oberstufe ist es aber dann erforderlich, die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ nicht rekursive, sondern direkt zu berechnen. Ein Berechnungsverfahren ähnlich dem, wie es unten in der Zeile (10.2) angeführt ist, wird sicher immer vorgestellt, aber der Zusammenhang mit dem pascalschen Dreieck wird häufig unterschlagen. Dabei ist es sehr leicht, diesen Zusammenhang aufzuzeigen. Zugleich wird den Schülern beispielhaft ein Weg der mathematischen Erkenntnisgewinnung demonstriert.

Das pascalsche Dreieck erzeugt man durch Notieren von Einsen auf den Schenkeln. Den Raum zwischen den Schenkeln füllt man durch die Addition zweier in einer Zeile benachbarter Zahlen. Dazu wird die gewonnene Summe dieser beiden Zahlen eine Zeile tiefer unterhalb des Zwischenraumes der zwei Summanden notiert.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Die dort rekursiv erzeugten Zahlen nennt man Binomialkoeffizienten, weil ein Binom wie $a+b$ potenziert genau die Zahlen einer Zeile des Dreiecks als Koeffizienten von Produkten von Potenzen von a und b liefert. Zum Beispiel ist

$$(a+b)^4 = \mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4.$$

Diese Binomialkoeffizienten lassen sich aber auch direkt bestimmen. Dazu muss man sie präzise benennen können. Jeder Binomialkoeffizient bekommt einen Vornamen und einen Nachnamen. Der Vorname benennt die Zeile und der Nachname die Position innerhalb einer Zeile. Die Nummerierungen beginnen dabei stets mit Null. Zum Beispiel ist

$$\binom{5}{0} = \binom{5\text{-te Zeile}}{0\text{-te Position}} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{4}{3} = \binom{4\text{-te Zeile}}{3\text{-te Position}} = 4$$

Hier nun das angedeutete pascalsche Dreieck in der beschriebenen Notation.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

Die zwei folgenden Definitionen helfen es die Binomialkoeffizienten direkt zu berechnen.

Definition *Sei n eine nichtnegative ganze Zahl, dann heißt $n!$ **n-Fakultät** genau dann, wenn gilt*

$$n! = \begin{cases} 1 & \textit{wenn} \quad n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n & \textit{wenn} \quad n > 0 \end{cases}$$

Definition *Seien n und k nichtnegative ganze Zahlen mit $k \le n$, dann heißt $\binom{n}{k}$ **Binomialkoeffizient von n über k** genau dann, wenn gilt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{10.2}$$

Folgerungen: Die Elemente des linken Schenkels haben stets die Gestalt $\binom{n}{0}$ und die des rechten Schenkels $\binom{n}{n}$. Sie liefern nur Einsen, denn

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1\,.$$

Die Summe zweier in einer Zeile benachbarter Zahlen $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{k+1}$ ist $\binom{n+1}{k+1}$ und steht damit eine Zeile tiefer unter ihnen, denn es gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}$$
$$= \frac{n! \cdot (k+1)}{k!(k+1) \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)!(n-(k+1))! \cdot (n-k)}$$
$$= \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$$
$$= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$$
$$= \frac{n! \cdot (1+n)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Bemerkung: Diese Herleitung ist eine gute und oft auch notwendige Erinnerungsübung zum Addieren von Brüchen.

Aufgabe 10.1: Zeigen Sie bitte für $n \geq 1$ mithilfe der vollständigen Induktion, dass $\binom{n}{k}$ gleich der Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist.

Zum Zusammenhang von pascalschem Dreieck und der Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge (F_n) wird gewöhnlich rekursiv definiert vermöge

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1 \quad \text{und} \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

Damit lassen sich alle weiteren Folgenglieder errechnen. Hier die ersten zehn Fibonaccizahlen:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13,\ F_8 = 21,\ F_9 = 34,\ F_{10} = 55, \ldots$$

Es ist sicher sehr aufwendig so die Zahl $F(259) = 600\,224\,643\,828\,207\,248\,620\,196\,670\,234\,592\,075\,321\,836\,561\,403\,380\,3411$ zu bestimmen. Aber mithilfe des pascalschen Dreiecks gelingt es eine explizite Darstellung der Fibonaccizahlen finden. So liegen in der folgenden Darstellung des pascalschen Dreiecks die dort fett gedruckten Zahlen **1**,**4**,**3** und **1**,**7**,**15**,**10**,**1** auf zwei parallelen Geraden, die das Dreieck von links unten nach rechts oben durchqueren.

1
1 1
1 2 1
1 3 **3** 1
1 **4** 6 4 **1**
1 5 10 **10** 5 1
1 6 **15** 20 15 6 1
1 **7** 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Addiert ergeben die auf einer solchen Geraden liegenden Zahlen stets eine Fibonaccizahl F_n. So ist $1+4+3 = 8 = F_6$ und $1+7+15+10+1 = 34 = F_9$.

Aufgabe 10.2: Da die Zahlen im pascalschen Dreieck Binomialkoeffizienten sind, kann man jede Fibonaccizahl als Summe geeigneter Binomialkoeffizienten darstellen. Finden Sie bitte eine solche Summenformel für F_n.

Aufgabe 10.3: Eine andere bemerkenswerte Folge (S_n) erhält man, wenn man mit S_n die Anzahl der ungeraden Zahlen auf einer solchen Geraden bezeichnet. So ist $S_6 = S(1,4,3) = 2$ und $S_9 = S(1,7,15,10,1) = 4$. Bestimmen Sie bitte die ersten zehn Folgenglieder und versuchen Sie auch für S_n eine explizite Darstellung zu gewinnen.

Bemerkungen:

Wenigstens zwei Lösungswege bezüglich des bertrandschen Paradoxons sollten Sie kennen.

Der Nachweis, dass die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ die Zahlen des pascalschen Dreiecks liefern, sollte Ihnen stets gelingen.

Auch der Zusammenhang von Binomialkoeffiziententenden und Fibonaccizahlen sollte Ihnen klar sein.