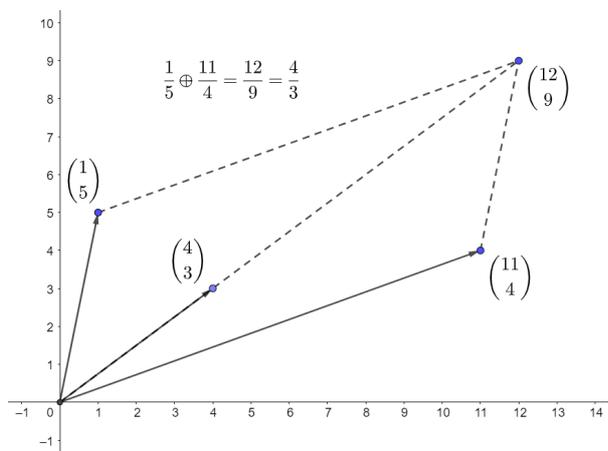


Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

Text 12 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

Aufgabe 11.1: Versuchen Sie bitte die Addition $\frac{a}{b} \oplus \frac{\alpha}{\beta} := \frac{a+\alpha}{b+\beta}$ geometrisch zu deuten.

Lösung: Der Blick auf den Stern-Brocot-Baum zeigt, dass die Summanden $\frac{a}{b}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ und die Summe $\frac{a+\alpha}{b+\beta}$ per Konstruktion vollständig gekürzte Brüche sind mit Zählern und Nennern aus \mathbb{N} . Da man nun jedem Bruch $\frac{a}{b}$ einen Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^2$ zuordnen kann entspricht die Addition \oplus zunächst der Vektoraddition. Allerdings mit der wesentlichen Einschränkung, dass der Betrag von $\begin{pmatrix} a+\alpha \\ b+\beta \end{pmatrix}$ durch den größten gemeinsamen Teiler von $a + \alpha$ und $b + \beta$ zu teilen ist. Dies zeigt beispielhaft das folgende Bild.



Aufgabe 11.2:

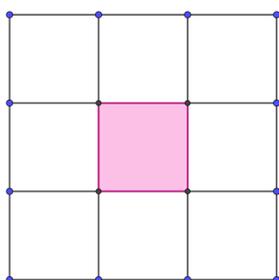


Bild 1

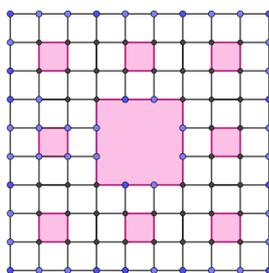


Bild 2

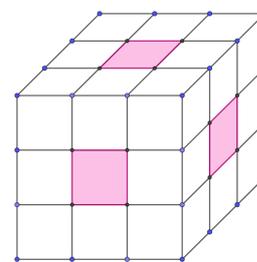


Bild 3

Aufgabe 11.2a: Das Bild 1 zeigt ein in neun kongruente Teilquadrate zerlegtes Quadrat. Entfernt man das mittlere Teilquadrat und verfährt man mit den verbliebenen Teilquadraten in gleicher Weise, so ergibt sich das Bild 2. Setzt man dieses Verfahren ad infinitum fort, so entsteht ein Fraktal. Bestimmen Sie bitte die Dimension und den Flächeninhalt dieses Fraktals.

Lösung: Mit $3^D = 8$ folgt $D = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.892789$. Setzt man o.B.d.A. den Flächeninhalt A_0 des gegebenen Quadrates gleich $1 = \left(\frac{8}{9}\right)^0$, so ist nach entnahme des mittleren Teilquadrates der neue Flächeninhalt $A_1 = \left(\frac{8}{9}\right)^1$. Der zu Bild 2 gehörige Flächeninhalt ist $A_2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{81}$ und mit $A_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$ gilt für den Flächeninhalt A_∞ des Fraktals

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$$

Aufgabe 11.2b: Bild 3 soll einen in 27 kongruente Teilwürfel zerlegten Würfel zeigen. Entfernt man bei jeder der 6 Seitenflächen den mittleren Teilwürfel und auch den Teilwürfel im Zentrum des ursprünglich gegebenen Würfels, dann bleiben 20 Teilwürfel übrig. Verfährt man mit den verbliebenen Teilwürfeln in gleicher Weise und setzt man dieses Verfahren ad infinitum fort, so entsteht ein weiteres Fraktal. Bestimmen Sie bitte die Dimension und den Rauminhalt dieses Fraktals.

Lösung: Mit $3^D = 20$ folgt $D = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2.726833$. Auch hier sei o.B.d.A. das Volumen des gegebenen Würfels $V_0 = 1 = \left(\frac{20}{27}\right)^0$. Nach Wegnahme der sieben Teilwürfel gilt $V_1 = \left(\frac{20}{27}\right)^1 = \frac{20}{27}$ und es folgt analog zur Lösung der Aufgabe 11.2a für das Volumen dieses Fraktals mit dem Namen 'Menger-Schwamm'

$$V_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^n = 0$$

Isaac Newton (*1643, †1726) und **Gottfried Wilhelm Leibniz** (*1646, †1716) sind die Väter der Differential- und Integralrechnung. Beide haben grob zeitgleich aus gänzlich unterschiedlichen Ansätzen heraus die Grundlagen der Analysis entwickelt dennoch ist es zwischen Ihnen zu einem heftigen Prioritätsstreit gekommen. Die folgenden Zeilen und Aufgaben sollen Ihnen die Ansätze dieser genialen Gelehrten etwas zugänglich machen.

Newton betrachtete die Bewegung eines fallenden Körpers und versuchte dabei den Begriff der Momentangeschwindigkeit mathematisch zu erfassen. Für Schüler habe ich den zu gehenden Gedankenweg in kleinste Schritte zerlegt und diese als Aufgaben formuliert. Diese Aufgaben zu lösen sollte Ihnen sehr leicht fallen.

Aufgabe 12.1: Professor Nils Niesdüwel hielt trotz eines starken Schnupfens aber coronavirenfrei seine Vorlesung zum Thema 'Gravitation'. Als er einmal kurz aus dem geöffneten Fenster des hoch gelegenen Hörsaales schaute, fiel ein Tropfen von seiner Nasenspitze in die Tiefe. Dies veranlasste ihn seine Hörer die folgenden Aufgaben lösen zu lassen.

12.1a: Meine Nasenspitze befand sich beim Ablösen des Tropfens 16.6m über dem Campusgelände und 4.9m über der Fensterbank des Arbeitszimmers von Dr. Valentius Krtschbggmer. Setzen Sie bitte die hiesige Fallbeschleunigung von $9.8 \frac{m}{s^2}$ in die Weg-Zeit-Funktion für den freien Fall

$$l(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

ein und bestimmen Sie die Fallzeiten des Tropfens bis zur Höhe der Fensterbank und endlich bis zum Boden des Campusgeländes. Der Luftwiderstand soll hierbei keine Beachtung finden.

Mit

$$l(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{98}{10} \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

folgt

$$\frac{49}{10} m = \frac{1}{2} \cdot \frac{98}{10} \frac{m}{s^2} \cdot t_{Fenster}^2 \Rightarrow t_{Fenster} = 1s$$

und

$$\frac{166}{10}m = \frac{1}{2} \cdot \frac{98}{10} \frac{m}{s^2} \cdot t_{\text{Boden}}^2 \Rightarrow t_{\text{Boden}} = \frac{1}{7} \sqrt{166} s \approx 1.8405855s$$

12.1b: Bestimmen Sie dann die Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} des Tropfens von der Nase bis zum Boden in $\frac{m}{s}$ und in $\frac{km}{h}$.

Lösung

$$\bar{v} = \frac{l}{t} = \frac{16.6m}{\frac{1}{7} \sqrt{166} s} \approx 9.0188691 \frac{m}{s} \approx 32.47 \frac{km}{h}$$

12.1c: Bestimmen Sie auch die Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} des Tropfens zwischen der Fensterbank und dem Boden.

Lösung

$$\bar{v} = \frac{l}{t} = \frac{16.6m - 4.9m}{\frac{1}{7} \sqrt{166} s - 1s} \approx 13.91886910 \frac{m}{s} \approx 50.11 \frac{km}{h}$$

12.1d: Wenn der Tropfen die Fensterbank passiert hat und noch eine halbe Sekunde fällt, welche Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v}_1 erreicht dann der Tropfen auf der Reststrecke unterhalb der Fensterbank?

Lösung

$$\bar{v}_1 = \frac{l}{t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9.8 \left(1 + \frac{1}{2^1}\right)^2 m - 4.9m}{\frac{1}{2^1} s} = 12.25 \frac{m}{s} = 44.1 \frac{km}{h}$$

12.1e: Sei $k \in \mathbb{N}$. Wenn der Tropfen die Fensterbank passiert hat und noch $\frac{1}{2^k}$ Sekunde fällt, welche Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v}_k erreicht dann der Tropfen auf der Reststrecke unterhalb der Fensterbank? Bestimmen Sie \bar{v}_k in Abhängigkeit von k .

Lösung

$$\begin{aligned} \bar{v}_k &= \frac{l}{t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9.8 \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)^2 m - 4.9m}{\frac{1}{2^k} s} = \frac{4.9 \left(\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)^2 - 1 \right)}{\frac{1}{2^k}} \frac{m}{s} \\ &= 4.9 \left(1 + \frac{2}{2^k} + \frac{1}{2^{2k}} - 1 \right) 2^k \frac{m}{s} = 4.9 \cdot \left(2 + \frac{1}{2^k} \right) \frac{m}{s} \end{aligned}$$

12.1f: Versuchen Sie nun die Momentangeschwindigkeit v des Tropfens in Höhe der Fensterbank von Dr. V. K. näherungsweise in $\frac{m}{s}$ und in $\frac{km}{h}$ zu bestimmen.

Lösung

$$v = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{v}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 4.9 \cdot \left(2 + \frac{1}{2^k} \right) \frac{m}{s} = 9.8 \frac{m}{s} = 35.28 \frac{km}{h}$$

Leibniz hatte einen gänzlich anderen Zugang gewählt. Mein ehemaliger Hochschullehrer Prof. Dr. Hans-Heinrich Körle beschreibt diesen Weg in seinem Buch *'Die phantastische Geschichte der Analysis'*. Der Universalgelehrte Leibniz, studierter Philosoph und Jurist, hatte sich wohl eher spielerisch mit Zahlenfolgen und Reihen beschäftigt. Dazu sei hier aus dem Kapitel II.R, Seite 157, unter der Überschrift *"Leibniz' Spielerei mit Folgen"* ein Absatz sinngemäß wiedergegeben:

"Sein erstes Spielzeug waren die Zahlenfolgen. Die Differenzen aufeinander folgender Quadratzahlen, die Differenzen dieser Differenzen et cetera - die iterierten Differenzen der Quadratzahlen, bilden das folgende Schema

1	4	9	16	25	...			
	3	5	7	9	11	...		
		2	2	2	2	2	...	
			0	0	0	0	0	...

Hat sich das "Differenzieren" dann schließlich verfeinert, so findet das Schema sein Gegenstück in der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} x^2 = 0."$$

Aufgabe 12.2a: Geben Sie bitte eine vollständige Lösung der obigen Differentialgleichung an.

Lösung *Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} x^2 = \frac{d^3 y(x)}{dx^3} = y'''(x) = 0$$

gewinnt man in drei Schritten mit Konstantanten C_1 , C_2 und C_3 vermöge

$$y'''(x) = 0 \Rightarrow y''(x) = C_1$$

$$y''(x) = C_1 \Rightarrow y'(x) = C_1 x + C_2$$

$$y'(x) = C_1 x + C_2 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

zu

$$y(x) = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Mit $C_1 = 2$, $C_2 = 0$ und $C_3 = 0$ erhält man dann die spezielle Lösung $y(x) = x^2$.

Aufgabe 12.2b: Betrachten Sie in diesem Sinne auch die Folge der Kubikzahlen und notieren Sie die zugehörige Differentialgleichung.

Lösung *Aus*

1	8	27	64	125	...		
	7	19	37	61	91	...	
	12	18	24	30	36	...	
		6	6	6	6	6	...
		0	0	0	0	0	...

gewinnen wir mit Leibniz die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} x^3 = 0 \quad \text{bzw.} \quad y^{(4)}_{(x)} = 0$$

Aufgabe 12.2c: Im Text 10 wurde die Fibonaccifolge $F(x)$ vorgestellt. "Differenzieren" Sie nun einmal die Fibonaccifolge gemäß dem obigen Schema und notieren Sie die zugehörige Differentialgleichung.

Lösung *Mit*

1	1	2	3	5	8	13	...	
	0	1	1	2	3	5	8	...

folgt

$$\frac{d}{dx} F(x) = F(x) \quad \text{bzw.} \quad \frac{dF}{dx} = F$$

Aufgabe 12.2d: Lösen Sie bitte die gefundene Differentialgleichung und zeigen Sie, dass die Lösung $F(x)$ keineswegs die Folgenglieder der Fibonaccifolge liefert.

Lösung *Die Lösungsmethode der 'Separation der Variablen' für Differentialgleichungen besagt, dass man, wenn es denn überhaupt möglich ist, die Variablen durch das Gleichheitszeichen trennt. Hier folgt mit $\frac{dF}{dx} = F$ die Gleichung $\frac{dF}{F} = dx$ bzw. $\frac{dF}{F} = 1 dx$. Integriert folgt mit Konstanten K und C*

$$\int \frac{dF}{F} = \int 1 dx \quad \text{und weiter} \quad \ln F = x + K$$

und weiter

$$e^{\ln F} = e^{x+K} \quad \text{bzw.} \quad F = e^K e^x = C e^x$$

Mit $F_{(1)} = 1 = C e^1$ folgt $C = \frac{1}{e}$ und damit $F_{(2)} = \frac{1}{e} \cdot e^2 = e$ im Wid. zu $F_{(2)} = 1$

Aufgabe 12.2d: Woran mag es liegen, dass die Lösung $F(x)$ die Folgenglieder der Fibonaccifolge nicht liefert?

Bemerkungen: Für einfache Fraktale sollten Sie die Dimension bestimmen können. Die Wege von Newton und Leibniz zur Differentialrechnung sollten Sie erläutern können.

Literatur:

[17] Heuser, Harro, Lehrbuch der Analysis Teil 1, B. G. Teubner Stuttgart 1993.

[18] Körle, Hans-Heinrich, Die phantastische Geschichte der Analysis, Oldenburg Wissenschaftsverlag München 2009