Ausgewählte Kapitel der Schulmathematik in den Sekundarstufen

Text 13 zur Vorlesung von Hans-Ulrich Brandenburger

Aufgabe 12.2e: Woran mag es liegen, dass die Lösung $F(x)$ die Folgenglieder der Fibonaccifolge nicht liefert?

Lösung *Es liegt an der "Verfeinerung des Differenzierens". Die fordert, dass das Differenzieren auch für die Zahlen zwischen den ganzen Zahlen gelten muss. Hätte man z. B. das Intervall zwischen 2 und 3 geviertelt, dann ergibt sich im Falle der Quadratzahlen die nachstehende Tabelle.*

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2^2 & & \left(\frac{9}{4}\right)^2 & & \left(\frac{10}{4}\right)^2 & & \left(\frac{11}{4}\right)^2 & & 3^2 & \cdots & \\ & \frac{17}{16} & & \frac{19}{16} & & \frac{21}{16} & & \frac{23}{16} & & \frac{25}{16} & \cdots \\ & & \frac{1}{8} & & \frac{1}{8} & & \frac{1}{8} & & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \cdots \\ & & & 0 & & 0 & & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{array}$$

Die Verfeinerung setzt also voraus, dass man eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt, die die Folgenglieder in der geforderten Reihenfolge liefert. Nun ist allerdings die zugehörige Funktion $F(x)$ etwas komplizierter gebaut als x^2.

Die Formel von **Moivre-Binet**

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^z - (-1)^z\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-z}\right)$$

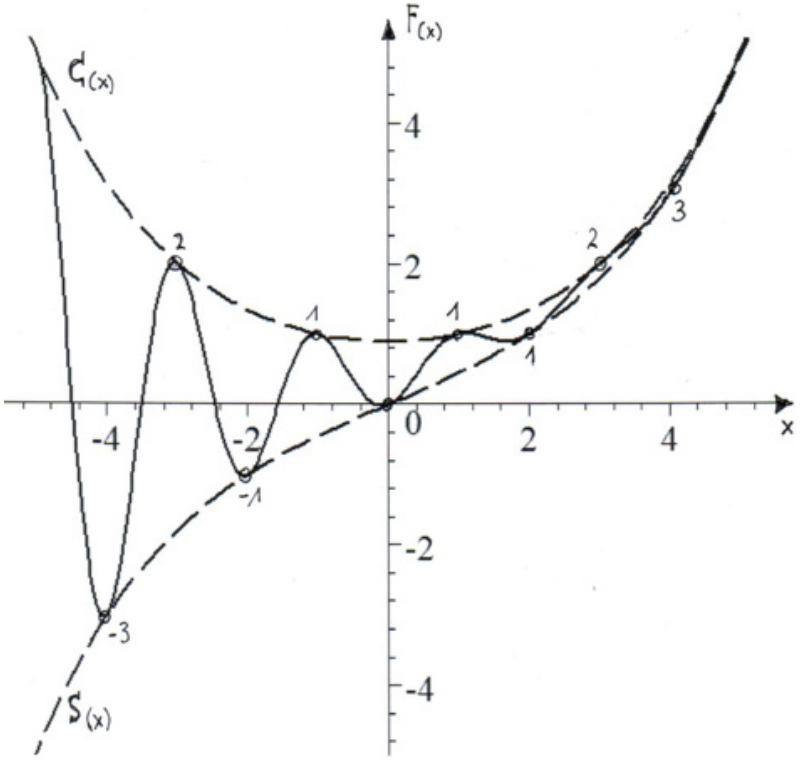
erlaubt es für beliebige ganze Zahlen z die Fibonaccizahlen zu berechnen. Dies ist aber wegen des Faktors $(-1)^z$ nicht für beliebige reelle Zahlen z möglich. So stellt die Formel von Moivre-Binet keine reelle Funktion über $\mathbb{R}$ dar. Unterscheiden wir jedoch zwischen ungeradzahligen und geradzahligen Argumenten z, dann haben wir mit

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}\right) \text{ und } S(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}\right)$$

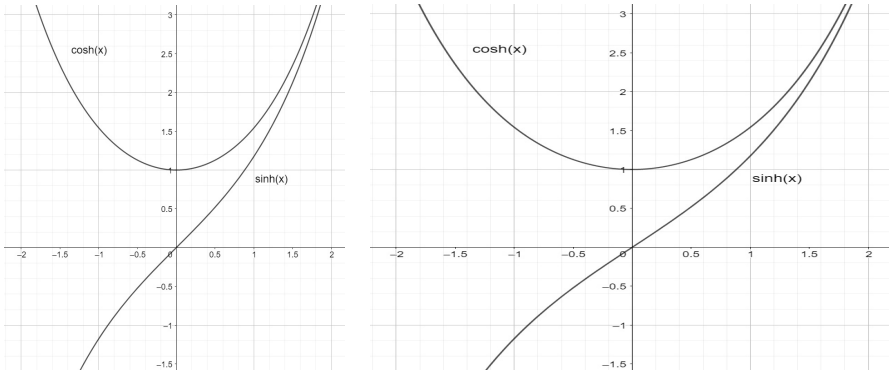
zwei differenzierbare Funktionen. $C(x)$ liefert für ungeradzahlige und $S(x)$ für geradzahlige Argumente x Fibonaccizahlen. Die Graphen von $C(x)$ und $S(x)$ sind in der nachstehenden Skizze gestrichelt zu sehen. Ersetzt man in der Formel von Moivre-Binet z durch x und $(-1)^x$ durch $\cos(\pi x)$, dann ist

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \cos(\pi x)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}\right)$$

eine differenzierbare Funktion, die für ganzzahlige Argumente x die Fibonaccifolge liefert. Der Funktionsgraph von F wandert so beständig zwischen den Graphen von C und S hin und her und liefert in den Berührungspunkten die Fibonaccizahlen. Dies zeigt die folgende Skizze hier.



Die folgenden zwei Bilder zeigen die Graphen der hyperbolischen Funktionen $\cosh(x)$ *(sprich: Kosinus hyperbolicus)* und $\sinh(x)$ *(sprich: Sinus hyperbolicus)* links bei gleicher und rechts bei ungleicher Achseneinteilung.



Das rechte Bild soll die offensichtlichen Gemeinsamkeiten mit der obigen Funktion F aufzeigen. Tatsächlich kann man mithilfe der hyperbolischen Funktionen und geeigneten konstanten die Funktion F darstellen. Die hyperbolischen Funktionen werden oftmals wenig anschaulich definiert vermöge

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ und } \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \tag{1}$$

Ebenso hätte man die trigonometrischen Funktionen definieren können vermöge

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ mit } i^2 = -1. \tag{2}$$

Aufgabe 13.1: Finden Sie ausgehend von den Definitionen in der Zeile (1) möglichst einfache Darstellungen für die Terme

$$\cosh(x)+\sinh(x) \quad \text{und} \quad \cosh^2(x)-\sinh^2(x)$$
$$\text{sowie} \quad \cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)$$

Lösung

13.1a

$$\cosh(x)+\sinh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x$$

13.1b

$$\begin{aligned}\cosh^2(x)-\sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x}-(e^{2x}-2+e^{-2x})) = 1\end{aligned}$$

Bemerkung: *Die Identität* $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$ *wird auch als* ***hyperbolischer Pythagoras*** *bezeichnet.*

13.1c

$$\begin{aligned}&\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)\\ &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\frac{e^y-e^{-y}}{2} =\\ &= \frac{1}{4}((e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y}))\\ &= \frac{1}{4}(e^xe^y+e^xe^{-y}+e^{-x}e^y+e^{-x}e^{-y}+e^xe^y-e^xe^{-y}-e^{-x}e^y+e^{-x}e^{-y})\\ &= \frac{1}{4}(2e^xe^y+2e^{-x}e^{-y}) = \frac{1}{2}(e^{x+y}+e^{-(x+y)}) = \cosh(x+y)\end{aligned}$$

Bemerkung: *Dies ist ein Additionstheorem für hyperbolische Funktionen.*

Aufgabe 13.2: Finden Sie ausgehend von den Definitionen in Zeile (2) möglichst einfache Darstellungen für die Terme

$$\cos(x)+i\sin(x) \quad \text{und} \quad \cos^2(x)+\sin^2(x)$$
$$\text{sowie} \quad \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$$

Lösung

13.2a

$$\begin{aligned}\cos(x)+i\sin(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+i\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\\ &= \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}+e^{ix}-e^{-ix}) = e^{ix}\end{aligned}$$

Bemerkung: $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$ *ist die berühmte Eulersche Formel.*

13.2b

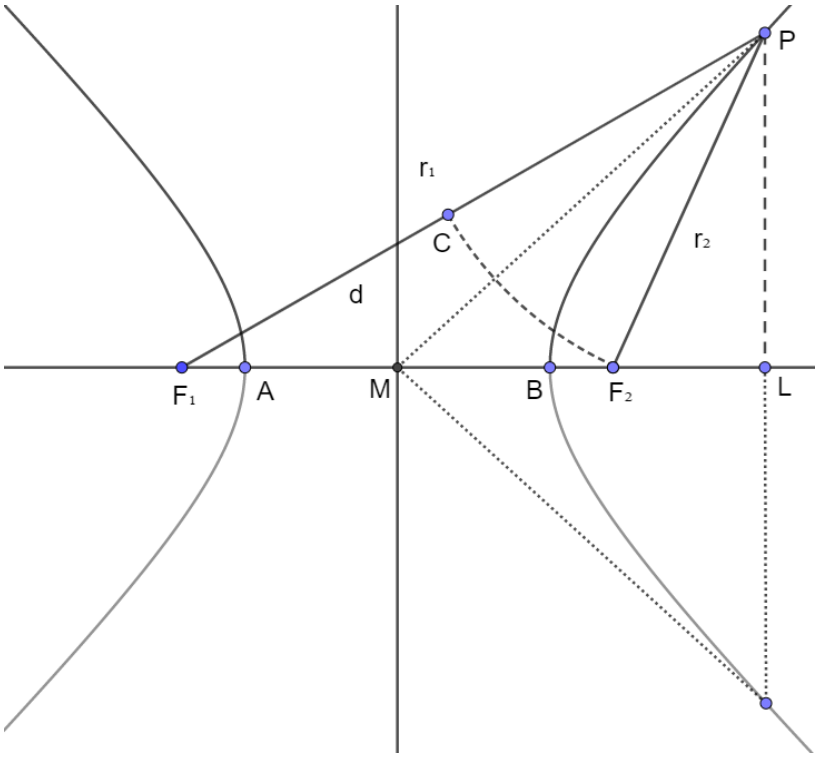
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2ix)} + 2 + e^{-2ix)} - (e^{2ix)} - 2 + e^{-2ix)}) = 1$$

13.2c

$$\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) =$$
$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} =$$
$$\frac{1}{4}((e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) + (e^{ix} - e^{-ix})(e^{iy} - e^{-iy})) =$$
$$\frac{1}{4}(2e^{ix}e^{iy} + 2e^{-ix}e^{-iy}) =$$
$$\frac{1}{2}(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}) = \cos(x+y)$$

Aber so, wie man die trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis den Schülern anschaulich macht, vermag man dies auch für die hyperbolischen Funktionen mithilfe der Einheitshyperbel. Die folgende Skizze zeigt die Einheitshyperbel als punktsymmetrischen Graphen zum Koordinatenursprung mit einem beliebig gewählten Punkt P auf dem rechten Hyperbelast. Mit $r_1 = |\overline{F_1P}|$ und $r_2 = |\overline{F_2P}|$ sind die Abstände eines Hyperbelpunktes P von den Brennpunkten F_1 und F_2 bezeichnet. Analog zur Gleichung des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$ lautet die Gleichung der Einheitshyperbel

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{3}$$



Aufgabe 13.3a: Zeigen Sie bitte, dass die Differenz $d = r_1 - r_2$ für alle Hyperbelpunkte $P(x,y)$ konstant ist und bestimmen Sie d. Die Brennpunkte der Einheitshyperbel

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{3}$$

sind hier mit $F_1\left(-\sqrt{2},0\right)$ und $F_1\left(\sqrt{2},0\right)$ gegeben.

Lösung *Mit $x = |\overline{ML}|$ und $y = |\overline{LP}|$ gilt im rechtwinkligen Dreieck PF_1L $r_1^2 = \left(x+\sqrt{2}\right)^2 + y^2$ und im rechtwinkligen Dreieck PF_2L $r_2^2 = \left(x-\sqrt{2}\right)^2 + y^2$. Also folgt*

$$\begin{aligned} d = r_1 - r_2 &= \sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2 + y^2} - \sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 2x\sqrt{2} + 2 + y^2} - \sqrt{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 + y^2} \end{aligned}$$

Da die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ es erlaubt, y^2 durch $x^2 - 1$ unter den Wurzeln zu ersetzen, folgt weiter

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{2x^2 + 2x\sqrt{2} + 1} - \sqrt{2x^2 - 2x\sqrt{2} + 1} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{2}x\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}x\right)1 + 1^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2}x\right)^2 - 2\left(\sqrt{2}x\right)1 + 1^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2} = \sqrt{2}x + 1 - \left(\sqrt{2}x - 1\right) = 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 13.3b: Auf welche Weise kann man nun mithilfe der Einheitshyperbel den $\cosh(\psi)$ und $\sinh(\psi)$ veranschaulichen?

Lösung *Die Hyperbelgleichung $x^2 - y^2 = 1$ und der* ***hyperbolischer Pythagoras*** $\cosh^2(\psi) - \sinh^2(\psi) = 1$ *liefern die Antwort vermöge*

$$x = \cosh(\psi) \quad \textit{und} \quad y = \sinh(\psi)\,.$$

Was unter dem Winkel ψ zu verstehen ist, werde ich weiter unten erläutern.

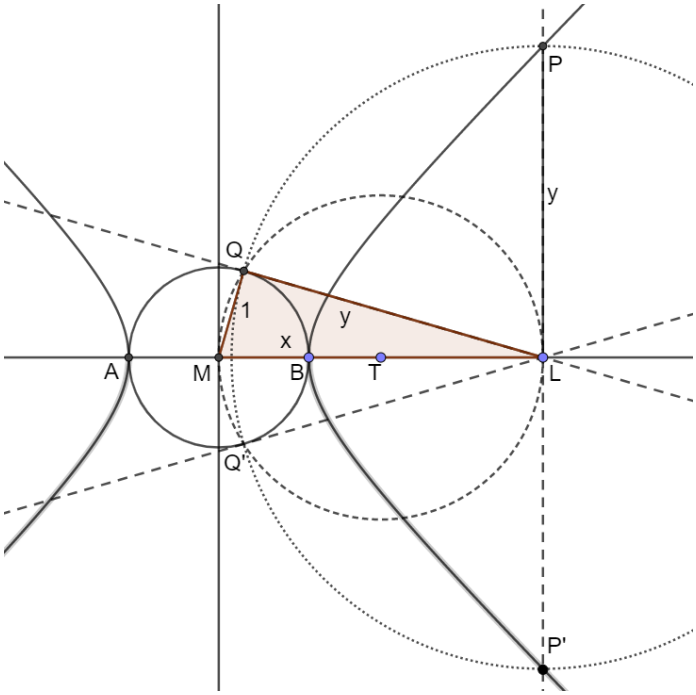
Aufgabe 13.3c: Die Gleichung (3) und der Satz von Pythagoras legen ein einfaches Verfahren nahe, um mit Zirkel und Lineal Punkte der Hyperbel zu konstruieren. Suchen Sie bitte nach einem geeigneten Konstruktionsverfahren.

Lösung

- *Die einfachste Vorgehensweise, um hier Hyperbelpunkte zu konstruieren besteht wohl darin, dass man z. B. zunächst mit einer Strecke r_2 um F_2 einen Kreis schlägt und dann mit der Strecke $r_1 = r_2 + 2$ einen Kreis um F_1. Die Schnittpunkte der beiden Kreise, falls vorhanden, sind dann stets Punkte der Hyperbel.*

- *Will man jedoch zu einer vorgegebenen x-Koordinate den zugehörigen Punkt $P(x,y)$ konstruieren, so ist der folgende Weg hilfreich. Der Hyperbelgleichung $x^2 - y^2 = 1$ entnimmt man die Koordinaten der Punkte A und B in dem Bild 14.1 zu $A(-1,0)$ und $B(1,0)$. Damit liegen A und B auf dem Rand des Einheitskreises um M. Die Koordinaten eines Hyperbelpunktes $P(x,y)$ können nun vermöge $x^2 = 1^2 + y^2$ als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks MLQ (siehe Bild 14.2) mit der Hypotenuse x und den Katheten 1 und*

y verstanden werden. Wenn der Thaleskreis über $x = |\overline{ML}|$ den Einheitskreis in Q bzw. Q' schneidet, dann ist $y = |\overline{QL}| = \left|\overline{Q'L}\right|$. Der Mittelpunkt des Thaleskreises ist hier mit T bezeichnet. Die Schnittpunkte P und P' des Kreises um L mit Radius y mit der Lotrechten zur x-Achse in L sind dann die erwünschten Hyperbelpunkte.



Bemerkungen zu Winkeln am Einheitskreis und an der Einheitshyperbel

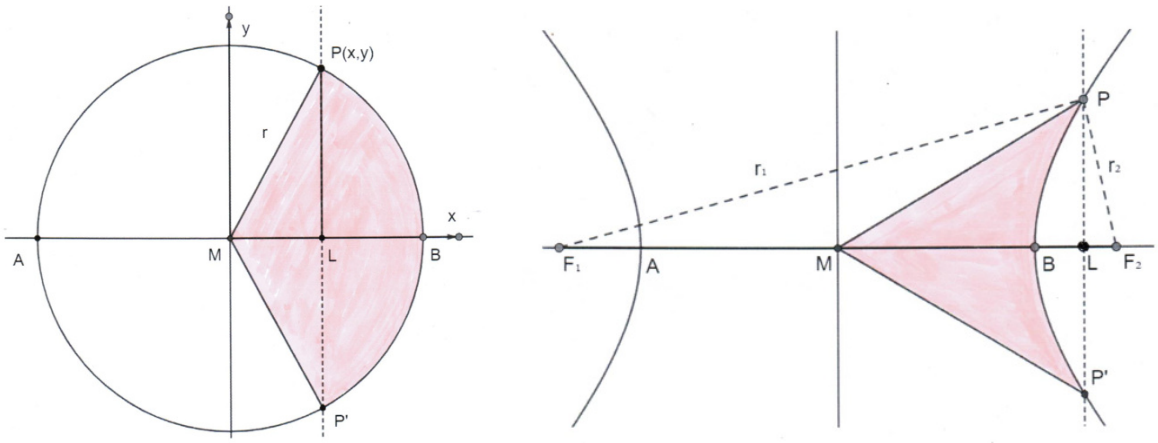
Bewegt man nach dem unteren linkenBild auf dem Einheitskreisrand einen Punkt P aus dem Punkt B im mathematisch positiven Drehsinn aus dem Punkt B heraus, dann ist die Bogenlänge φ die der Punkt P auf der Kreislinie zurücklegt das Bogenmaß des Winkels BMP. Negative Winkelmaße ergeben sich, wenn P im mathematisch negativen Drehsinn aus B heraus bewegt wird. Hat der Punkt P die Koordinatendarstellung (x,y), dann kann man die trigonometrischen Funktionen anschaulich definieren vermöge

$$\sin\varphi := y \qquad \cos\varphi := x \qquad \tan\varphi := \frac{y}{x}$$
$$\cot\varphi := \frac{x}{y} \qquad \sec\varphi := \frac{1}{x} \qquad \csc\varphi := \frac{1}{y}$$

Da der Flächeninhalt des Einheitskreises mit π ebenso groß ist wie der halbe Umfang des Kreises, liegt der Gedanke nahe Winkel auch als Flächeninhalte zu deuten. Da der Flächeninhalt $\mathcal{A}$ des farbig ausgemalten Kreissektors in diesem Bild sich zur ganzen Kreisfläche π genau so verhält wie die Bogenlänge $\widehat{P'P} = 2\varphi$ zum Umfang 2π des Kreises folgt mit $\frac{\mathcal{A}}{\pi} = \frac{2\varphi}{2\pi}$

$$\mathcal{A} = \varphi$$

Also kann der Winkel φ sowohl als Flächeninhalt eines Einheitskreissektors als auch als die zugehörige halbe Bogenlänge dieses Sektors verstanden werden.



Das rechte Bild zeigt die Einheitshyperbel und mit A, B, P und P' vier Hyperbelpunkte. Für die x-Koordinate von P gilt $x = |\overline{ML}| = \cosh(\psi)$ und für die y-Koordinate gilt $y = |\overline{PL}| = \sinh(\psi)$. Der Winkel ψ ist damit gleich dem Flächeninhalt $\mathcal{F}$ der eingefärbten Fläche, die der Hyperbelbogen aus dem Dreieck $MP'P$ herausschneidet. Um das einsichtig zu machen, zeigt man mithilfe der Integralrechnung $\mathcal{F} = \operatorname{arccosh}(x)$. Dabei schreibt meine Mathematiksoftware $\operatorname{arccosh}(x)$ für die Umkehrfunktion der *Kosinus-hyperbolicus-Funktion* und es gilt dann

$$\mathcal{F} = \operatorname{arccosh}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \cosh(\mathcal{F}) = x$$

Dieses Symbol $\operatorname{arccosh}$ ist meines Erachtens nicht klug gewählt, denn diese Umkehrfunktion heißt *Areacosinus-hyperbolicus* und nicht Arkuscosinus hyperbolicus. Die Arkusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Das Wortteil *Arcus* steht für Kreisbogen und das Wortteil *Area* für Fläche bzw. Flächeninhalt. In der Literatur finden sich übrigens eine Vielzahl von Schreibweisen wie z. B. Arcosh, arccosh, arcosh und acosh.

Bemerkungen: Die Wege von Newton und Leibniz zur Differentialrechnung sollten Sie an den hier gegebenen Beispielen erläutern können. Die angegebenen Definitionen der hyperbolischen Funktionen sollten sie fortan wissen und einfache Folgerungen leisten können. Man sollte fortan wissen, was man unter trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen und ihren Umkehrfunktionen zu verstehen hat. Auch sollte die Deutung der Argumente der hyperbolischen und der trigonometrischen Funktionen als Flächeninhalte verstanden sein.

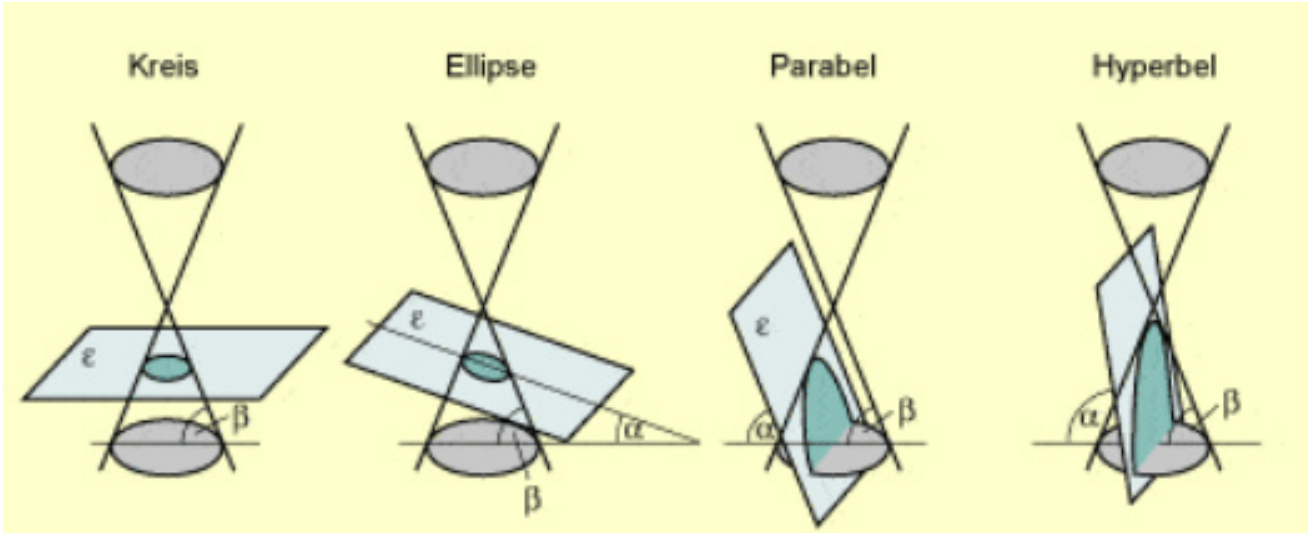
Literatur:

[17] Heuser, Harro, Lehrbuch der Analysis Teil 1, B. G. Teubner Stuttgart, 1993.

[18] Körle, Hans-Heinrich, Die phantastische Geschichte der Analysis, Oldenburg Wissenschaftsverlag München, 2009.

[19] Bronstein-Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik 7. Auflage, Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1969.

[20] Scheid, Harald, Elemente der Geometrie 3. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg-Berlin, 2001.


Kreis
Ellipse
Parabel
Hyperbel
ε
β
ε
α
β
ε
α
β
α
β