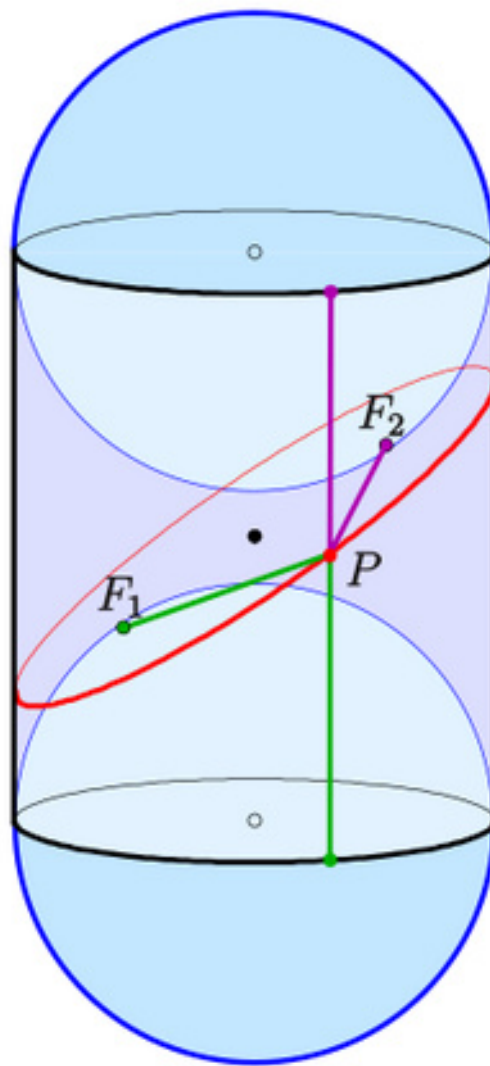


Ein Zylinderschnitt (Ellipse) zeigt beispielhaft die Vorgehensweise:



Ableitungen von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$

Für die hyperbolischen Funktionen $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ gilt

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x,$$

denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh x &= \frac{d}{dx} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{de^x}{dx} - \frac{de^{-x}}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left(e^x - \frac{de^{-x}}{d(-x)} \cdot \frac{d(-x)}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x \end{aligned}$$

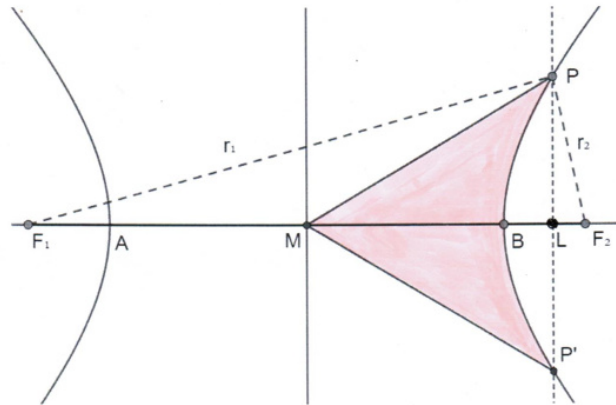
und weiter folgt mit der Lösung

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$$

von der Aufgabe 13.1a

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{d(e^x - \sinh x)}{dx} = \frac{de^x}{dx} - \frac{d\sinh x}{dx} = e^x - \cosh(x) = \sinh x$$

Bestimmung des Flächeninhaltes von $\mathcal{F}$



Da die Flächenanteile von $\mathcal{F}$ über und unterhalb der x-Achse gleich groß sind, reicht es, den Anteil über der x-Achse zu bestimmen und das Ergebnis dann zu verdoppeln.

Also gilt mit dem Flächeninhalt F_{MLP} des Dreiecks MLP

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= 2 \left(F_{MLP} - \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt \right) \\ &= 2 \left(\frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt \right) = x\sqrt{x^2 - 1} - 2 \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt\end{aligned}$$

Das Integral $\int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt$ kann man mithilfe der Substitution $t = \cosh z$ und der Folgerung $\frac{dt}{dz} = \sinh z$ bzw. $dt = \sinh(z) dz$ umformen zu

$$\int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt = \int_{\operatorname{arccosh} 1}^{\operatorname{arccosh} x} \sqrt{\cosh^2 z - 1} \sinh(z) dz = \int_{\operatorname{arccosh} 1}^{\operatorname{arccosh} x} \sinh^2(z) dz$$

Der letzte Gleichungsschritt folgt mit dem hyperbolischen Pythagoras. Nun nutzen wir die *Partielle Integration*

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

um das Integral $\int_{\operatorname{arccosh} 1}^{\operatorname{arccosh} x} \sinh^2(z) dz$ zu erfassen. Es gilt unabhängig von den Integrationsgrenzen

$$\begin{aligned}\int \sinh^2(z) dz &= \sinh(z) \cosh(z) - \int \cosh^2(z) dz \\ &= \sinh(z) \cosh(z) - \int (1 + \sinh^2(z)) dz \\ &= \sinh(z) \cosh(z) - \int 1 dz - \int \sinh^2(z) dz \\ &= \sinh(z) \cosh(z) - z - \int \sinh^2(z) dz\end{aligned}$$

Schafft man beide Integrale auf die linke Gleichungsseite und teilt dann mit 2 so folgt

$$\int \sinh^2(z) dz = \frac{1}{2} (\sinh(z) \cosh(z) - z) + C$$

bzw.

$$\int \sinh^2(z) dz = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\cosh^2 z - 1} \cosh(z) - z \right) + C$$

Ersetzen wir nun wieder $\cosh(z)$ durch t , so folgt

$$\begin{aligned}\int_1^x \sqrt{t^2 - 1} \, dt &= \int_{\operatorname{arccosh} 1}^{\operatorname{arccosh} x} \sinh^2(z) \, dz \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{t^2 - 1} \cdot t - \operatorname{arccosh} t \right) \right]_1^x \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 - 1} \cdot x - \operatorname{arccosh} x \right) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{1^2 - 1} \cdot 1 - \operatorname{arccosh} 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 - 1} \cdot x - \operatorname{arccosh} x \right)\end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt $\mathcal{F}$ gilt damit

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= x\sqrt{x^2 - 1} - 2 \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} \, dt \\ &= \sqrt{x^2 - 1} \cdot x - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 - 1} \cdot x - \operatorname{arccosh} x \right) \\ &= \operatorname{arccosh} x = \psi \qquad \qquad \qquad \mathbf{q.e.d.}\end{aligned}$$

Bemerkungen: Die Bemerkungen zu den Kegelschnitten sollten Sie wiedergeben können. Erklären Sie auch, warum ein Zylinderschnitt eine Ellipse sein kann. Der Nachweis, dass das Argument ψ von $\cosh \psi$ gleich dem Flächeninhalt von $\mathcal{F}$ ist, wird nicht verlangt. Der Ansatz sollte Ihnen aber klar sein.

Literatur:

- [17] Heuser, Harro, Lehrbuch der Analysis Teil 1, B. G. Teubner Stuttgart 1993.
- [19] Bronstein-Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik 7. Auflage, Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1969
- [20] Scheid, Harald, Elemente der Geometrie 3. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg-Berlin, 2001
- [21] Bartsch, Hans-Jochen, Taschenbuch Mathematischer Formeln, 19. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig, 2001